Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXIV, (1997) pp. 361-396

UNA CONFERENZA STENOGRAFATA DI RENATO CACCIOPPOLI

Nota di L.Carbone* - G.Cardone* - F.Palladino**
con un contributo di G.Prodi***

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 6/12/1997)

Riassunto - Nella presente nota viene presentata una conferenza stenografata di Renato Caccioppoli, tenuta a Parma nel giugno del 1949, recentemente ritrovata nel fondo omonimo, giacente presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II".

Abstract - In this work we publish the text, originally written in shorthand, of a lecture given by Renato Caccioppoli at Parma on June, 1949, and recently found in the homonymous *Nachlass* , belonging to Department of Mathematics and Applications "R. Caccioppoli" of the University of Naples "Federico II".

---

* Università degli Studi di Napoli "Federico II" - Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli.

** Università degli Studi di Salerno - Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica.

*** Università degli Studi di Pisa - Dipartimento di Matematica

1. INTRODUZIONE

Di Renato Caccioppoli si conservano numerosi ricordi personali (si vedano ad esempio vari contributi contenuti in [Fergola 1994], [Guerraggio 1986], [Istituto Italiano per gli Studi Filosofici 1989], [Ricerche di Matematica 1991], e le varie commemorazioni comparse alla sua morte [Miranda 1959], [Scorza Dragoni 1963], [Cimmino 1959]); gli sono stati dedicati alcuni documentari (si confronti [Ghirelli Gravagnuolo 1987]); la sua vicenda umana è stata oggetto di varie rielaborazioni letterarie (si confrontino [Toma 1992], e sotto forma cinematografica [Martone 1992]); la sua figura ha fornito spunti all'ispirazione di pittori e scultori ([Valenzi 1994], [De Val], [Colaps 1980]).

La sua opera scientifica è stata analizzata con accuratezza sotto molti aspetti (si vedano ancora, ad esempio, vari contributi in [Istituto Italiano per gli Studi Filosofici 1989], [Ricerche di Matematica 1991], [Carbone-Guerraggio 1995], [Guerraggio 1987], la prefazione in [Caccioppoli 1963]).

Un gran numero di articoli di quotidiani e riviste gli sono stati dedicati; in moltissime opere storiche dedicate o a Napoli o alla cultura scientifica italiana nel periodo a cavallo della seconda guerra mondiale vi è menzione più o meno ampia della sua attività.

Tuttavia la bibliografia primaria propriamente detta appare ancora lacunosa. Naturalmente si hanno le opere matematiche raccolte in [Caccioppoli 1963] e cominciano ad affiorare alcune lettere (si vedano ad esempio [Cafiero 1996], [Rionero 1996], [l'Unità 1992]): poco se si pensa alle sue attività tra cui, ad esempio, quelle di critico cinematografico e di conferenziere (anche politico). Proprio a tale settore si intende dare un contributo d'informazione con la conferenza stenografata che qui viene presentata insieme col testo di un intervento che ad essa seguì, di Francesco Severi e di alcuni materiali correlati. Essa si differenzia, com'è naturale, notevolmente dalle opere a stampa per una maggiore freschezza e immediatezza; e questi elementi emergono con vigore da

un semplice raffronto con una conferenza, questa volta rielaborata e pubblicata da Caccioppoli stesso, tenuta una quindicina di anni prima ([Caccioppoli 1932c]) sullo stesso argomento.

In assenza, per quanto noto agli autori della presente nota, di registrazioni di discorsi di Caccioppoli, essa sembra così costituire quanto di più vicino si possa avere per riottenere le suggestioni e le emozioni di un ascolto diretto.

Inoltre la conferenza fornisce elementi significativi anche nell'esame dell'evoluzione di un notevole settore dell'analisi italiana contemporanea: l'Analisi non lineare.

Naturalmente che in questa vi siano notevoli echi del pensiero di Caccioppoli è un fatto ben noto: basta ad esempio valutare il peso che hanno avuto verso la fine degli anni '40 il volume di Miranda ([Miranda 1948]) o negli anni '70 il volume di Prodi e Ambrosetti ([Prodi-Ambrosetti 1973]). Tuttavia nel caso della Teoria geometrica della misura il passaggio dalle concezioni di Caccioppoli a quelle di De Giorgi è immediatamente ricollegabile al periodo che quest'ultimo, su stimolo di Picone, trascorse nella sua giovinezza presso il primo; nel caso della teoria della misura la continuità tra le idee di Caccioppoli e le attuali è nitidamente rappresentata dall'opera di Cafiero; nel caso della teoria della regolarità per equazioni ellittiche il flusso delle idee da Caccioppoli a quelle della generazione successiva è stabilito dall'opera soprattutto di Miranda e di Cimmino; per quanto concerne l'Analisi non lineare, invece, si può avere la sensazione che gli echi finiscano con l'essere di natura più indiretta, solo, per così dire "cartacei": nonostante l'insistere a lungo sul settore delle ricerche di Scorza Dragoni.

In effetti proprio questa conferenza ha giocato un ruolo notevole nello stabilire un legame diretto tra le concezioni di Caccioppoli e le scelte di Prodi; ma su questo punto si può rinviare senz'altro ai ricordi e alle riflessioni che lo stesso Prodi, ascoltatore allora assai più che attento, ha l'occasione ora di proporre a quasi mezzo secolo di distanza.

La conferenza inoltre mette bene in evidenza anche una delle circostanze per le quali si sarebbe determinato uno iato tra il pensiero di Caccioppoli e le ricerche successive: è lo stesso Caccioppoli a insistere, infatti, su come egli abbia scelto negli anni cruciali dal '31 al '36 una strada differente da quella topologica che andavano costruendo Leray e Schauder e che sarebbe diventata dominante.

Il caso dell'Analisi funzionale rimane così intermedio, forse, tra quelli della teoria della misura geometrica, della teoria della misura, della teoria della regolarità da un lato e quello dell'Analisi complessa dall'altro: osserva infatti acutamente Vesentini nel suo intervento in [Ricerche di Matematica 1991] a proposito di un contributo di Caccioppoli in quest'ultimo settore:

"Ma qui l'inadeguatezza dello strumento algebrico-topologico che presiede alla costruzione di quel ciclo appesantisce la trattazione ed offusca quel lampeggiare di idee e di intuizioni geniali che contraddistingue i lavori di Caccioppoli. D'altra parte questa inadeguatezza non era un fatto casuale e non attiene soltanto a questo lavoro ed al suo autore". Occorreva "l'approntamento di strumenti algebrici e topologici sempre più raffinati e potenti". Ma "quel flusso di idee nuove nell'analisi complessa, nella geometria differenziale, nella topologia algebrica, lambiva appena l'Italia e riusciva a penetrarvi solo nei tardi anni cinquanta quando Caccioppoli stava ormai per lasciarci".

2. IL FONDO CACCIOPPOLI E IL REPERIMENTO DELLA CONFERENZA STENOGRAFATA.

Qualche anno dopo la morte di Renato Caccioppoli, il 29 maggio 1962, il fratello Ugo donava all'Università degli Studi di Napoli, nella persona del suo rettore *pro-tempore* Giuseppe Tesauro, i libri e le riviste che costituivano la biblioteca dello scomparso: si trattava di circa 120 annate di riviste, tutte concernenti la matematica, e di circa 210 libri in larghissima prevalenza di matematica, ma tra i quali non mancavano testi di fisica, molti dei quali

riguardanti la Teoria della relatività. Il valore della donazione consisteva in lire 842730.

I libri e le riviste furono naturalmente inseriti nella biblioteca dell'allora Istituto di Matematica, e di essi furono redatti appositi cataloghi ancora oggi esistenti.

Tuttavia i beni descritti nell'atto formale di donazione non esaurivano il contenuto della donazione effettiva. Di questa in effetti faceva parte anche un vasto numero (circa 1500) di estratti probabilmente non menzionati per la difficoltà di redigere rapidamente un inventario e di assegnare loro un valore commerciale. Gli estratti furono inseriti in una imponente Miscellanea assai vasta, nella quale erano già confluiti gli estratti presenti nel Seminario Matematico Battaglini e nei vari Gabinetti annessi agli Istituti di Matematica al momento della costituzione dell'Istituto unico policattedra, che ad essi si sostituì ([Miranda, 1974]). Tuttavia l'interesse per gli estratti, a causa della rapida diffusione delle macchine fotoriproduttrici, stava notevolmente scemando; l'ingombrante Miscellanea, che era stata intensamente utilizzata fino agli anni Sessanta, andò riempendosi di polvere. Fu così sistemata in un gran numero di plichi che vennero trasferiti in un deposito: il catalogo venne smarrito. Probabilmente gli estratti di Caccioppoli emersero dai contenitori solo quando su di essi vennero apposti i timbri di identificazione. Non fu così notato che tra di essi vi era un piccolo plico contenente documenti di natura personale. Quando, dopo il trasferimento dell'Istituto di Matematica, ormai divenuto Dipartimento, nella nuova sede di Monte S.Angelo, a partire dal 1991 si diede inizio ai lavori di riordino dei beni di interesse museali lasciati nella sede storica in Via Mezzocannone, 8, ci si accorse della presenza del piccolo plico.
Esso conteneva:

(a) una lettera di G.Fichera a Caccioppoli del 24/6/1954;

(b) una lettera di G.Fichera a Miranda del 25/5/1954;

(c) il testo di un dattiloscritto di G.Fichera dal titolo *Fondamenti di una teoria della misura per gli insiemi*, forse allegato alla lettera di cui in (b);

(d) un complesso di dattiloscritti concernenti un Congresso della cultura e relativi ad interventi di A.C.Iemolo, G.De Benedetti, G.Petronio, C.Alvaro, G.Calogero, L.Piccinato, P.Bottoni, V.Bisceglie;

(e) il verbale e la relazione della Commissione giudicatrice del concorso per professore straordinario di Analisi matematica (algebrica e infinitesimale) presso l'Università di Catania, presieduta da Caccioppoli e che aveva dichiarato vincitore il 15/11/1953 Federico Cafiero;

(f) il testo dattiloscritto di una conferenza tenuta da Caccioppoli, dapprima stenografata e poi riportata in caratteri correnti unitamente al testo di una successiva replica di Severi, ad una lettera di accompagnamento di Mambriani a Miranda e, redatta su questa, ad una nota di trasmissione di Miranda allo stesso Caccioppoli.

Il complesso dei documenti descritto in (f) è quello che viene qui pubblicato.

3. L'OCCASIONE DELLA CONFERENZA

La conferenza fu tenuta nell'ambito di un convegno sul tema *Analisi funzionale ed equazioni funzionali*, svoltosi a Parma nella mattinata del 4 giugno 1949.

Il convegno sottolineava, nell'ambito dell'Università di Parma la ricostituzione della Facoltà di Scienze e il ripristino delle lauree in Matematica e Fisica. Esso cadeva anche in un momento importante dell'attività accademica del suo organizzatore, Antonio Mambriani, il quale, il primo novembre dell'anno precedente aveva conseguito, non più giovanissimo, il titolo di professore straordinario.

Il rettore Teodosio Marchi porse il saluto ai partecipanti ([Marchi, 1950]). Seguì un intervento di Severi, designato alla presidenza del convegno, che colse l'occasione per precisare le sue posizioni nei confronti del ruolo crescente dell'astrazione in Matematica: in quegli anni il bourbakismo si accingeva a celebrare i suoi primi trionfi, e la stessa Geometria algebrica, così nettamente ancorata a una salda visione spaziale nei contributi e nell'approccio della scuola italiana e così prodiga per lui di successi, si muoveva verso un alto stato di astrazione "un po' pericoloso quando è soverchio" come commentava Severi stesso.

Così poteva affermare:

"ma sempre, se cerchiamo di rintracciare il fondamento delle più ermetiche astrazioni, scopriamo che nessuna di esse nasce coerente e fruttifera, se non si stacca da una costruzione concreta, da un'intuizione che una volta conosciuta svela l'aspetto misterioso e miracoloso col quale si ammantano tante costruzioni assiomatiche. Perciò noi, geometri algebristi, ascolteremo con grande interesse quello che i nostri giovani colleghi (giovani sì, ma già affermatisi come egregi ricercatori) ci diranno in questa occasione. E ciò soprattutto perché siamo persuasi che la Matematica non ammette compartimenti stagni, ch'essa è essenzialmente unitaria e che tutti i suoi rami sono intercomunicanti e solidali ed ognuno di essi riceve alimento, luce e forza dai progressi degli altri" ([Severi, 1950]).

Naturalmente nelle stesse parole di Severi v'era un'eco di alcune delle posizioni del gruppo bourbakista che al suo lavoro di ricostituzione della matematica aveva dato il nome significativo di *Élements de Mathematique*, laddove un corretto francese avrebbe richiesto il plurale *Élements de Mathématiques* invece del singolare.

D'altro canto era pur vero che la sua luminosa carriera si andava chiudendo e che quasi mezzo secolo prima (nell'anno 1904-1905) egli era stato a Parma come professore di ruolo, tuttavia annoverare il Caccioppoli della fine degli anni quaranta, già affermato caposcuola tra i "giovani colleghi (giovani sì, ma già affermatisi come egregi ricercatori)" certamente richiedeva una risposta e Caccioppoli nel corso della conferenza non lasciò cadere l'occasione.

Il Convegno comunque apparve subito strutturato come l'espressione compiuta di quel forte movimento di pensiero che trovava la sua ispirazione proprio in Caccioppoli: la prima relazione fu infatti quella di Caccioppoli e subito dopo seguirono le comunicazioni di Miranda su *Equazioni a derivate parziali in forma parametrica*, di Cimmino su *Inversione delle corrispondenze funzionali lineari ed equazioni differenziali*, di Zwirner su *Grado topologico di una trasformazione continua in uno spazio astratto lineare normalizzato completo*, di Fantappié su *L'analisi funzionale nel campo complesso e i nuovi metodi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali*.

La relazione di Caccioppoli fu, secondo le parole di Mambriani ([Mambriani, 1950]) di carattere "generale" sul tema del Convegno.

Egli infatti espose con calore le linee di *indirizzo* delle sue ricerche rigettando il concetto di *metodo*, che tanto si andava consolidando in quegli anni, come si può evincere dal testo qui presentato.

Così Miranda nel trasmettere il testo a Caccioppoli non poteva fare a meno di parlare di un "comizio".

Alla conferenza di "indirizzo", dopo alcune osservazioni di Severi che Caccioppoli non ascoltò finendo con l'allontanarsi, seguirono comunicazioni di Miranda, Cimmino e Zwirner, che illustrando la loro produzione recente, fornirono brillanti esempi di applicazioni dell'indirizzo stesso.

Il Convegno finì così con l'essere quasi la controparte destinata ad un pubblico più vasto dei corsi che Miranda aveva tenuto per un pubblico più specializzato nell'anno accademico 1948-49 alla Scuola Normale di Pisa, e nell'anno precedente a Napoli e dai quali nacque il celebre volume *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale* ([Miranda, 1949]).

Era nelle intenzioni di Antonio Mambriani raccogliere gli Atti del Convegno e con essi dare inizio alla Rivista di Matematica della Università di Parma. A tale scopo si era preoccupato di far stenografare i vari interventi. Riportati in forma usuale, i resoconti furono spediti agli autori per una revisione. I contributi di Cimmino e Fantappié revisionati furono così pubblicati nel primo fascicolo del primo volume della rivista che apparve nel Gennaio-Febbraio 1950.

Mambriani, preoccupato per la trascuratezza di Caccioppoli nello scrivere, pensò di chiedere l'aiuto di Miranda e a questi inviò il resoconto dell'intervento di Caccioppoli.

Miranda trasmise a Caccioppoli il resoconto perché vi provvedesse con la sua "ben nota diligenza" e il testo giacque così dimenticato per cinquant'anni.

Vale la pena peraltro di osservare che Caccioppoli aveva tenuto già sugli stessi argomenti, oltre quella pubblicata in [Caccioppoli, 1932c], un'altra importante conferenza tenuta il 23 febbraio 1935 presso il Seminario Matematico dell'Università di Roma ([Caccioppoli, 1936]) e anche questa, contrariamente all'uso, non venne mai pubblicata.

4. CRITERI DI PUBBLICAZIONE

Lo stenografo del Convegno era "ignaro" di matematica, come osservava lo stesso Mambriani. Così il resoconto della conferenza appare, per usare le parole di Miranda, "ameno", sì da far credere di assistere ad "un esame sul *corso dei postulati*".

Il testo del dattiloscritto ha inoltre subito una leggera revisione a mano. Un esame calligrafico superficiale consente di escludere l'intervento di Caccioppoli e Miranda, ma non quello di Mambriani. Dalle correzioni apportate sembra che il revisore possedesse conoscenze matematiche, ma non specifiche nel settore. I suoi interventi sono per lo più limitati all'ortografia.

Naturalmente le formule, peraltro assai poche per scelta deliberata di Caccioppoli, sono cadute o assai mal ridotte.

Tuttavia la presenza, come osservato, tra le opere a stampa di Caccioppoli, di una conferenza sullo stesso tema, l'opera di Miranda sui *Problemi di esistenza in Analisi funzionale*, e le note pubblicate sull'argomento dallo stesso Caccioppoli, da Miranda, da Cimmino, da Scorza Dragoni, consentono di ricostruire con sufficiente sicurezza il testo, che peraltro per scelta deliberata doveva contenere pochissime formule.

Per agevolare la lettura e contemporaneamente offrire il testo completo del dattiloscritto revisionato trasmesso da Mambriani, si sono effettuate alcune scelte di valore convenzionale.

Nel caso di sostituzione di termini del dattiloscritto con ricostruzioni congetturali, per queste si è usato il corsivo, mentre è stata riportata in nota la versione originale.

Nel caso dell'inserzione di parole non contenute nel dattiloscritto, gli inserti, sempre in corsivo, sono stati racchiusi tra parentesi quadre; se l'inserzione è avvenuta a causa di una lacuna segnalata già nel dattiloscritto, l'esistenza della lacuna è riportata in nota.

Quando si sia ritenuto di eliminare delle parole contenute nel dattiloscritto, esse sono state trasferite in nota, mentre nel corpo del testo si è indicato il numero della nota corrispondente tra parentesi quadre.

In taluni casi ove la sostituzione, l'inserzione o l'eliminazione sembrano offrire significativi margini di opinabilità, si è inserito nel testo un punto interrogativo racchiuso tra parentesi tonde.

Nelle note il dattiloscritto sarà indicato con Ds.

5. I TESTI

(a) La lettera di Mambriani a Miranda

Parma, 22 settembre 1949.

Chiarissimo Signor
Prof. Dott. CARLO MIRANDA
dell'Università
NAPOLI

Caro MIRANDA,

faccio ora seguito alla tua gentile lettera del 29 giugno u.s. Circa la stampa del resoconto del Convegno di Parma del 4 giugno 1949 ho fissato di seguire il tuo consiglio, adottante la soluzione intermedia che mi proponevi. La relazione di CACCIOPPOLI, le parole di SEVERI, la relazione di Cimmino, ecc. saranno pubblicate nel primo fascicolo della RIVISTA DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITÀ DI PARMA. Tale primo fascicolo sarà appunto dedicato al Convegno di Parma e al prof. Severi. Riconosco il prof. SEVERI non solo perché ha avuto la presidenza del Convegno, ma anche perché ha iniziato la sua carriera universitaria a Parma e a Parma sostanzialmente è venuto a chiuderla: pubblicherò l'elenco completo delle sue pubblicazioni con una visione d'insieme fatta dal prof. CONFORTO.

Ti unisco quindi la copia datami dallo stenografo (purtroppo ignaro di Matematica) della relazione di CACCIOPPOLI, affinché tu abbia a interessarti caldamente della cosa presso CACCIOPPOLI, per ridurre i tempi della preparazione della relazione.

In attesa di un tuo rigo di riscontro, gradisci - con molti ringraziamenti - i miei più cordiali saluti.

Tuo Antonio Mambriani

P.S. Della relazione di Caccioppoli darò 100 (cento) estratti gratis con copertina ed anche di più se li vorrà. Se per concludere capisci sia necessario qualche compenso, dimmelo e cercherò di provvedere.

(b) La lettera di Miranda a Caccioppoli

Caro Renato,

ti trasmetto il tutto perché tu provveda con la tua ben nota diligenza. Il poscritto è ridicolo, ma non farci caso perché "riservato" a me e risponderò io, se credi, come si conviene. Quella che è amena, invece, è la trascrizione stenografica del tuo comizio. Sembra di assistere a un esame sul "corso dei postulati".

Cordialità affettuose

Carlo

(c) La conferenza di Caccioppoli

PROF. CACCIOPPOLI

Anche a nome dei colleghi relatori io porgo un caldo ringraziamento all'Università di Parma, al prof. Mambriani per l'ospitalità concessaci e per l'occasione che ci è stata offerta di parlare di alcuni problemi che ci stanno a cuore e che cercheremo di rivificare attraverso le nostre esposizioni. Devo dire che il nostro compito è difficile perché il pubblico è sempre eclettico e l'argomento disgraziatamente è tecnico: è tanto più difficile dopo la presentazione luminosa e suggestiva che ne ha fatto il prof. Severi ma tanto ... per aspera ad astra. Il prof. Severi ha mostrato il miraggio del tema, a noi tocca mostrarne il cammino. Noi ci proponiamo soprattutto di incitare allo studio di questi problemi i giovani e speriamo che quello che vuol essere un incitamento

non finisca per essere un invito al sonno: e lasciatemi dire col Manzoni (però egli lo diceva alla fine del suo scritto, mentre io non oso dirlo che in principio): "se poi dopo non saremo riusciti che ad annoiarvi siate sicuri che non si è fatto apposta".

Questi problemi che ci stanno a cuore costituiscono un ramo rigoglioso della Analisi funzionale, forse si potrebbe dire, un albero rigoglioso della foresta funzionale. Il contributo italiano a questo gruppo di problemi è quello che io vorrei mettere in luce e quindi vi domando subito scusa che forse vi daremo l'impressione di parlare troppo di noi, ma ne parleremo piuttosto come rappresentanti di una scuola e di una grande tradizione italiana che ha il suo ideale nel nome glorioso di Volterra. Queste tradizioni non sono mai venute meno in Italia anche sul piano di una larghissima collaborazione internazionale. Da parte nostra riteniamo nostro dovere conservarla questa tradizione.

I problemi che noi trattiamo sono, come vi ho detto, dei problemi particolari per quanto vivi, per quanto interessanti. Occorre appunto che vi ricordi che fra di noi vi è un cultore di questa materia che ha portato ad essa degli altissimi contributi, il prof. Fantappiè, autore della "Teoria dei funzionali analitici". Noi non dobbiamo qui occuparci di questa teoria, perché la materia è più ristretta.

E adesso passo senz'altro a precisare quali sono gli argomenti che intendiamo trattare. Noi abbiamo studiato nell'ambito nazionale soprattutto i problemi di esistenza e di unicità delle equazioni funzionali. Abbiamo inquadrato la molteplicità innumerabile, o tentiamo di inquadrare la molteplicità innumerabile di questi problemi di esistenza entro gli schemi dell'Analisi funzionale, diciamo meglio dell'Analisi e della Geometria funzionale. Noi quindi, più che fornire un metodo unico, ben determinato, che debba servire per tutti gli scopi (cosa questa che non è possibile in matematica), piuttosto che fornire una panacea esistenziale - ancor meno esistenzialistica - noi ci proponiamo di dare un indirizzo, di caratterizzare un indirizzo. Questo indirizzo di inquadramento nell'Analisi funzionale si rifarà alle prime e fondamentali ricerche di Volterra. Gli sviluppi che questa ha avuto in seguito hanno condotto ad una serie di condizioni sempre più vaste, sempre più generali, sempre più complesse su quegli spazi funzionali che adesso che chiamano anche spazi astratti o addirittura spazi, tout court, che erano ignoti al tempo di Volterra quando si parlava col passaggio caso per caso, come Volterra si esprimeva, dal finito all'infinito. Oggi noi disponiamrizzo di inquadramento nell'Analisi funzionale si rifarà alle prime e fondamentali ricerche di Volterra. Gli sviluppi che questa ha avuto in seguito hanno condotto ad una serie di condizioni sempre più vaste, sempre più generali, sempre più complesse su quegli spazi funzionali che adesso che chiamano anche spazi astratti o addirittura spazi, tout court, che erano ignoti al tempo di Volterra quando si parlava col passaggio caso per caso, come Volterra si esprimeva, dal finito all'infinito. Oggi noi disponiami abbiamo studiato queste questioni affrontando dei problemi concreti - sarà necessario che vi dica due parole per caratterizzare qualche tipo di spazio limitandomi alle considerazioni essenziali. Questi spazi sono i cosiddetti spazi lineari, [come ad esempio] le matrici nelle quali è definita la combinazione lineare a coefficienti reali. Quindi è definito lo zero, è definita la distanza tra due punti come norma della differenza fra questi due punti. Presi due punti [F_1 *e* F_2], in sostanza, la differenza dà luogo ad una norma, questa norma è un numero positivo, ossia questa norma è la distanza di F_1-F_2 *dallo*[1] zero. Questi spazi danno la possibilità di fissare anche, in base alla definizione di distanza, la nozione di convergenza e questo porta a chiedersi se il criterio di convergenza è applicabile - e noi lo consideriamo senz'altro applicabile -. Finalmente vi è una considerazione fondamentale da fare, il teorema di *Bolzano-Weierstrass*[2] che [*non*] si estende agli spazi funzionali. Una successione limitata non contiene necessariamente una successione convergente. Quando un insieme, oltre ad essere limitato, è tale

[1] Ds: cioè.

che da ogni sua successione se ne può trarre una convergente, si chiama compatto. In una trasformazione continua di questo tipo [$\psi=S(\varphi)$][3] vi sarà luogo a considerare l'eventualità di qualche cosa di più della continuità. Questa è una nozione fondamentale che suggerì a Hilbert la così detta completa continuità la quale consiste in questo, che ogni insieme limitato che ha lo spazio fisso viene trasformato in un insieme compatto.

Queste le nozioni generali che sono alla base delle considerazioni che adesso mi appresto a svolgere.

La base di questa teoria resta ancora storicamente la teoria delle equazioni integrali e con le equazioni integrali si può dire che l'Analisi matematica ha preso coscienza di se stessa perché si è detto che per secoli si era fatto della Analisi funzionale senza saperlo. Queste equazioni integrali, lo sapete, sono di due specie: prima e seconda specie. Io vorrei mostrarvi come la impostazione di questi due diversi tipi conduce a due diverse impostazioni di problema esistenziale in Analisi funzionale. Alla equazione di seconda specie si può dare questa forma $\varphi=S(\varphi)$[4] (S rappresentante una trasformazione lineare). L'equazione di prima specie si presenta invece in questa forma [$\psi=S(\varphi)$] (?).

Risultati più notevoli, più completi, nel campo delle equazioni integrali si ottengono per le equazioni di seconda specie, ma per ottenere risultati più vasti e più completi quando si passa dal caso lineare al caso non lineare è proprio l'equazione di seconda specie che bisogna prendere in considerazione. In sostanza è un'equazione caricata[5], come diciamo noi. Invece [*per*] l'equazione di prima specie, [*è il*] risultato di una certa trasformazione lineare, [*che*] deve essere un certo punto dello spazio funzionale. Nel primo caso quando passiamo

[2] Ds: Boncar-Wester (???).
[3] Ds: (indica alla lavagna Fi 1° ...).
[4] Ds: Fi=S.
[5] La nomenclatura è quella di [Kneser 1914], come utilizzata in [Miranda 1937] e [Miranda 1938].

dal problema lineare al problema non lineare possiamo continuare a scrivere così [$\varphi=S(\varphi)$] S diventa una trasmutazione[6] funzionale, non più lineare, e il problema si pone in questo modo: *trovare*[7] il valore di un punto φ[8] tale che si trasformi mediante S [*in se stesso*][9]. Si giunge così ad un problema di punti uniti *per una*[10] trasformazione funzionale. E questa è la prima impostazione.

Questa impostazione ha condotto a notevoli sviluppi *topologici*[11] ai quali posso accennarvi in poche parole, poiché vorrei piuttosto soffermarmi sopra il secondo caso. Nella impostazione di questo problema viene ben naturale, rifacendosi ancora alla ispirazione volterriana (non da Voltaire ma da Volterra) viene ben naturale il passaggio dal finito all'infinito e considerare prima questo problema, nel caso che lo spazio [*delle* φ][12] sia lo spazio *ad*[13] un *numero finito*[14] di dimensioni. Da qui viene il teorema di *Brouwer*[15]. Il teorema assicura che se - io lo formulo così - una trasformazione converte lo spazio in un insieme limitato entro questo insieme deve cadere un punto unito: la trasformazione ammette un punto unito. Nel passaggio *all'*[16] infinito alla nozione di insieme limitato subentra quello di insieme compatto del quale ho parlato prima. Non sarebbe giusto il teorema così formulato: se uno spazio funzionale qualsiasi o di questo

[6] Il termine che qui Caccioppoli adopera invece del più comune trasformazione è già da lui utilizzato in [Caccioppoli 1932], ove osserva "S essendo simbolo di una operazione funzionale (trasmutation secondo Bourlet)".

[7] Ds: trovato.

[8] Ds: Fi.

[9] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.

[10] Ds: alla di.

[11] Ds: tipologici.

[12] Ds: Fi.

[13] Ds: di.

[14] Ds: nuovo Fi.

[15] Ds: Braon (??).

[16] Ds: in.

tipo è trasformato in un insieme limitato, la trasformazione ammette un punto unito. Ciò *accade*[17] però quando la trasformazione avviene di *tutto lo spazio*[18] in un insieme compatto nel senso che abbiamo precisato. In questo consiste l'espressione del teorema di *Brouwer*[19] espressione la quale comprende un grande numero di teoremi esistenziali dell'analisi alla quale tutti quanti abbiamo un poco contribuito. In vero, però, i maggiori contributi sono quelli arrecati *da Birkhoff e Kellogg*[20] e quello del compianto *Schauder*[21], matematico polacco assassinato a Leopoli nel 1943[22]. Io mi sono imbattuto nelle mie ricerche in questi nomi senza conoscerli: ho avuto cioè quello che si chiama un infortunio, ma che io non considero tale, ma semplicemente una falsa curva. Per la riuscita del metodo è necessario *questo perfezionamento*[23] che la S [[24]] trasformi lo spazio in un insieme compatto. La S [[25]] si presenta come una trasformazione continua nel senso che ho detto prima e per questo ho dovuto premettere quelle nozioni preliminari didattico-pedagogiche. Una equazione di questo tipo deve essere una trasformazione completamente continua e risolutiva del semplice ufficio esistenziale, cioè ammette per lo meno una soluzione. Qui, naturalmente, si guadagna qualche cosa in *generalità*[26] e si perde qualche cosa in precisione.

[17] Ds: equivale.

[18] Ds: tutti gli spazi.

[19] Ds: Braon (??).

[20] Ds: di Birkof, Kellog.

L'accenno è alla sovrapposizione dei contenuti tra i lavori [Caccioppoli 1930], [Caccioppoli 1931], [Birkhoff - Kellogg 1922], [Schauder 1927].

[21] Ds: Sande (??).

[22] Scorza Dragoni riferisce nel suo contributo in [Guerraggio 1986] che Caccioppoli pianse alla tragica notizia della morte di Schauder.

[23] Ds: questa perfezione.

[24] Ds: (??).

[25] Ds: (??).

[26] Ds: genericità.

E' difficile dire di più di questa equazione fino a quando non si fanno ipotesi più particolari su queste operazioni. Questa completa continuità dà la semplice esistenza del punto unito.

Ora ci sono molti problemi di Analisi funzionale che non si presentano naturalmente in questa forma. In questa forma si presentano quei problemi in particolare tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali che si lasciano tradurre in equazioni integrali, ma questo non è di tutti i problemi e soprattutto non è di molti problemi moderni e particolarmente appassionanti e allora bisogna passare alla seconda impostazione.

Nella seconda impostazione il problema si pone così: Dato ψ[27] trovare φ[28]; cerchiamolo senza fissare il valore di ψ[29], lasciando questo ψ[30] indeterminato e cerchiamo di renderci conto se e sotto quali condizioni si può affermare che *a*[31] ogni punto ψ[32] corrisponde un punto φ[33] che lo ha generato in questa trasformazione. Cioè cerchiamo, assegnato il corrispondente [[34]] ψ[35], di invertire questo corrispondente, cioè dato ψ[36] trovare φ[37]. Il problema si presenta, in altre parole, come un problema di inversione di una corrispondenza funzionale.

La trattazione di questo argomento si fonda essenzialmente su una teoria delle funzioni implicite di linea, quella fondata da Volterra e di poi ampiamente

[27] Ds: Psi.
[28] Ds: Fi.
[29] Ds: Psi.
[30] Ds:Psi.
[31] Ds: in.
[32] Ds: Psi.
[33] Ds: Fi.
[34] Ds: T di.
[35] Ds: Psi.
[36] Ds: Psi.
[37] Ds: Fi.

sviluppata al quale ognuno di noi ha arrecato qualche contributo. La *inversione*[38] delle trasformazioni funzionali si compie sempre rifacendosi [*al finito*] non più come passaggio [*dal finito all'infinito*][39], ma semplicemente per avere un suggerimento sulla via da percorrere *nei*[40] problemi, studiando dapprima l'invertibilità [*locale*] della trasformazione e poi vedendo in quali casi la trasformazione risulta [*completamente invertibile*]. La invertibilità [*locale*] è data dal criterio di *invertibilità*[41] di una trasformazione lineare. Ma si tratta *di*[42] definire una trasformazione lineare funzionale associata per un determinato punto la cui invertibilità garantisca la invertibilità locale. Da questa relazione si ricava nei casi più comuni per differenziazione ψ[43] uguale ad una operazione lineare nella differenziazione dei φ[44]. Qui la relazione è lineare fra [φ *e* ψ][45]. Qui non siamo più in presenza di una equazione integrale di seconda specie ma semplicemente di una equazione funzionale lineare e quindi i risultati che dobbiamo enunciare o le ipotesi che dobbiamo fare, hanno un carattere determinato. In *casi particolari*[46] potrà anche arrivarsi a una equazione di seconda specie e allora il determinante di [*Freedholm*][47] farà proprio l'ufficio del[*lo jacobiano*][48]. Ma nel caso generale dobbiamo limitarci a considerare se questa trasformazione è invertibile localmente.

[38] Ds: conversione.
[39] Ds: dall'infinto al finito.
[40] Ds: sui.
[41] Ds: convertibilità.
[42] Ds: fi.
[43] Ds: Psi.
[44] Ds: Fi.
[45] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.
[46] Ds: caso particolare.
[47] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.
[48] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.

Questo è il primo punto. Secondo punto: come si potrà garantire, in base alla *invertibilità*[49] locale verificata punto per punto almeno nell'ipotesi più semplice, come si potrà garantire, dicevo, la invertibilità, fissati due spazi ? Per il momento consideriamo ancora spazi sovrapposti, ma voi capite che questa impostazione si estende anche a spazi diversi. Tuttavia, ripeto, per semplicità, consideriamo ancora gli spazi sovrapposti. Ebbene questa inversione locale non garantisce anche la invertibilità in grande. Ispirandoci al modello di dimostrazione [*in dimensione finita*], ci siamo preoccupati di estendere i criteri i quali garantiscono la invertibilità in grande a questi spazi funzionali per lo meno a questi spazi che adesso prendiamo in considerazione. Queste ricerche che in parte ho condotte io si fondano sulla estensione prima di un teorema di *Hadamard*[50] che dice sostanzialmente questo: se due spazi sono in corrispondenza locale invertibile e se [*quando*] un punto tende all'infinito nei riguardi dello spazio, altrettanto fa il punto corrispondente nel secondo spazio, allora vi è invertibilità nella corrispondenza. Questo è ancora un criterio parziale, deficiente e difatti risponde particolarmente bene soltanto quando l'equazione integrale è di seconda specie. Perché ? Perché noi non possiamo tradurre il limite, ma bisogna tradurlo con il compatto. Ed allora un criterio della stessa semplicità di quello di *Hadamard*[51] si può avere proprio quando la trasformazione [*è completamente continua*][52](?) perché allora il criterio si formula allo stesso modo. Ogni volta che si considera l'equazione di seconda specie allora si può estendere il teorema di *Hadamard*[53]. Quando *un punto*[54] tende all'infinito anche il singolo [*trasformato*] deve tendere all'infinito. Che

[49] Ds: convertibilità.

[50] Ds: Adamar. Il riferimento è a [Hadamard 1906].

[51] Ds: Adamar.

[52] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.

[53] Ds: Adamar.

[54] Ds: un numero.

cosa invece avviene nel caso generale ? Nel caso generale lo si formula in questo modo: supponiamo che la trasformazione localmente invertibile sia tale che ogni successione $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$[55] che viene trasformata in una successione $\psi_1, \psi_2, \ldots$[56] convergente, sia convergente o basta dire compatta, insomma che dato un insieme di punti ψ[57] in queste condizioni si può affermare la invertibilità completa. Dunque, in breve, si può dire così: Devono essere trasformati in insiemi compatti soltanto gli insiemi compatti. Questa condizione è molto più generale dell'altra e questa veramente comprende un grande numero di *casi*[58]. Anzi, non soltanto di *casi* particolari, ma di teorie estese[59].

Ma non dimentichiamo che l'argomento di questa conversazione importa anche le equazioni differenziali. Ma io termino subito questa breve esposizione per dirvi qualche parola sulle applicazioni che abbiamo fatto.

Siamo arrivati alla invertibilità in grande. Applicazioni utili di questo risultato si ottengono considerando delle trasformazioni che contengano un parametro. Per queste condizioni si verifica la invertibilità e *se φ è tenuto a descrivere un insieme compatto ogniqualvolta α e ψ descrivono insiemi compatti*[60], se tutto questo si verifica, allora noi passiamo dalla invertibilità della

[55] Ds: Fi.

[56] Ds: Psi.

[57] Ds: Psi.

[58] Ds: tali.

[59] Il metodo descritto da Caccioppoli è quello introdotto in [Caccioppoli 1932a], [Caccioppoli 1932b] e già esposto in [Caccioppoli 1932c].

[60] Ds: se sussiste la funzione di un insieme compatto.
Il dattiloscritto su questo punto sembra rendere assai male le parole di Caccioppoli. La sostituzione è stata effettuata utilizzando quanto asserito da Caccioppoli in [Caccioppoli 1936] (Opere II, 163 penultimo capoverso). La sostituzione sembra sostenibile in quanto attraverso tutta la conferenza Caccioppoli utilizza il concetto di compattezza.. Una ricostruzione dettagliata dei risultati che Caccioppoli descrive è contenuta in [Miranda 1949].

trasformazione per una determinazione di α[61] che può essere un punto dello spazio funzionale qualunque *alla*[62] invertibilità *entro*[63] i limiti dove sono verificate queste ipotesi fondamentali.

Questi risultati che vi ho accennato molto sommariamente - e di più non potevo fare - li vedremo inquadrarsi in una serie di ricerche particolari le quali si può dire sono scaglionate per più di mezzo secolo e che hanno condotto caso per caso a risultati importanti ma insoliti; vi detterò qualche esempio. La teoria così detta del prolungamento analitico: introduce un *parametro*[64] analitico e partendo da una soluzione di un problema esistenziale passa alla soluzione del problema facendo un *prolungamento*[65] analitico di questo *parametro*[66]. Questo risultato si inquadra come caso generale estremamente semplice. Un caso tipico di quello che vi dicevo sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. A questo recò un grande contributo Bernstein[67] che si serviva del prolungamento analitico.

Oggi in base a questi risultati abbiamo costituito una teoria completa delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine. Forse la cosa non è ancora completa: ci sono dei risultati che non sono soltanto di carattere critico, ma di carattere fondamentale da conseguire. Per esempio, l'estensione completa del teorema di Hilbert[68]. Io ho potuto stabilire questo teorema nel suo campo naturale di validità, cioè supponendo la continuità delle derivate[69]. I

[61] Ds: alfa.

[62] Ds: possa essere l'idea di.

[63] Ds: entri.

[64] Ds: parimetro.

[65] Ds: procedimento.

[66] Ds: perametro.

[67] Il riferimento sembra essere a [Bernstein 1910] capitolo III.

[68] Il riferimento sembra essere alla questione posta da Hilbert sulla analiticità delle soluzioni delle equazioni ellittiche analitiche.

[69] Il riferimento è a [Caccioppoli 1935].

risultati completi non si sono potuti stabilire, ma ormai abbiamo la via aperta e si tratta di fare uno studio accurato che può essere un poco fastidioso nel *condurlo*[70], ma che è poi molto semplice nei risultati, uno studio accurato delle equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico, dei rapporti *con le condizioni*[71] di regolarità della soluzione. Questo studio lo abbiamo condotto *Schauder*[72]ed io[73]. Ma adesso vi è qualche cosa di più da fare: vi sono i nuovi risultati da *conseguire*[74] che non abbiano più carattere puramente locale. Il conseguimento di questo risultato permetterebbe di completare questa teoria e renderla assolutamente definitiva.

Un altro esempio nel campo delle equazioni lineari. Io ho fatto uno studio molto semplice *del problema di Dirichlet*[75] relativamente *alla equazione* [76]di Laplace [[77]] con punti analoghi relativamente a qualsiasi altra *equazione (?)*[78]. Utilizzando quelle disuguaglianze che avevo stabilito in un modo particolarmente semplice e fecondo con l'estendere la teoria delle equazioni di tipo ellittico. Questa espressione esprime un particolare valore di α[79] che è risoluto, cioè per un particolare valore di α[80] si avrà una *soluzione*[81] relativa all'equazione di Laplace. Ebbene noi possiamo collegarla con qualsiasi altra

[70] Ds: condurla.

[71] Ds: fra le conversione.

[72] Ds: Scauter (??).

[73] Il riferimento è essenzialmente a [Caccioppoli 1933], [Caccioppoli 1934] e a [Schauder 1934]. In effetti Caccioppoli ripeterà una frase simile in [Caccioppoli 1950].

[74] Ds: consegiore.

[75] Ds: della prova di Rochelet (???).

[76] Ds: alle equazioni.

[77] Ds: (??).

[78] Ds: relazione.

[79] Ds: alfa.

[80] Ds: alfa.

[81] Ds: variazione.

equazione di tipo lineare. E così arriviamo alla risoluzione completa dei problemi. Ancora nel campo lineare noi siamo stati condotti proprio per necessità di questa applicazione ad uno studio approfondito delle equazioni funzionali lineari delle loro condizioni di funzionalità che sarebbero le condizioni di invertibilità di una trasformazione lineare in uno spazio funzionale. E qui occorre riconoscere i contributi che hanno arrecato Cimmino[82] (con una teoria completa di tipo ellittico relativa a una qualsiasi superficie chiusa e che *avevo*[83] iniziato soltanto relativamente ai problemi di esistenza di Riemann[84], Amerio allo studio dei problemi dei valori al contorno dei problemi funzionali lineari. In questo stesso ordine di idee ricordo anche il contributo di Ascoli alla teoria delle trasformazioni lineari ed alla teoria della inversione, della *trasformazione*[85], della completezza, ma qui debbo sorvolare.

Per accennare a qualche altro problema, ricorderò quello (trattato da me) della determinazione di una superficie chiusa convessa che abbia una *metrica*[86] assegnata. Questo problema era stato affrontato da *Weyl*[87] con una argomentazione analitica formidabile che è stata anche ripresa parecchie volte. Bene, questo problema non era mai stato risoluto completamente con una precisazione ragionevolmente attenuata dalla ipotesi di regolarità se non con uno di questi procedimenti. Ma qui usciamo dal campo dei problemi relativi agli spazi lineari. Questo problema è relativo non più alle linee ma agli spazi localmente lineari, cioè agli spazi suscettibili punto per punto di rappresentazione sopra spazi lineari.

---

[82] Il riferimento è a [Cimmino 1938].

[83] Ds: aveva.

[84] Il riferimento è a [Caccioppoli 1934] e [Caccioppoli 1938].

[85] Ds: trasforazione.

[86] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.

[87] Ds: Vail (?).

L'accenno è a [Caccioppoli 1940].

Un'altra applicazione - e vengo così all'ultimissima parte - di questo procedimento è quello delle equazioni ellittiche parametriche. E' un problema molto importante e tipico perché non c'è da fare traduzioni in equazioni. E' uno studio che ha iniziato Miranda[88] e che io ho continuato[89]. Per dare un esempio, si tratta delle equazioni le quali caratterizzano le [*estremali*][90] di un integrale doppio assegnato però in forma parametrica. Si trattava di risolvere un problema di inversione locale: problema di Aumbet[91] come dicono i tedeschi. Cioè data una superficie costruire la superficie relativa al contorno prossimo. Si capisce che la parola prossimo va definita caso per caso in base all'ordine di questa prossimità. Questo problema è stato risoluto da Miranda nella ipotesi che una equazione lineare fosse illimitatamente risolubile. Cioè ha caratterizzato le condizioni di invertibilità locale nella corrispondenza cui facevo allusione dianzi fra superficie da una parte e superficie del contorno dall'altra. Ma noi ci siamo dovuti rendere conto che queste condizioni di invertibilità locale non si possono ritenere verificate nel caso più comune ma anche più interessante per le equazioni ordinarie. Per questo l'equazione in forma parametrica non è più tenuta a essere verificata ed allora si imponevano, come abbiamo visto, certi problemi che abbiamo dovuto affrontare ed io obtorto collo me li sono sobbarcati. Le ricerche sono state difficili ma i risultati soddisfacenti. Io ho portato una semplificazione al problema, perché non si poteva andare avanti. Ho supposto [*che*] la trasformazione lineare associata [[92]] quella che dovrebbe dare l'invertibilità [[93]] non è più invertibile. In che senso ? Non è più invertibile nel

---

[88] Il riferimento è a [Miranda 1935a,b].

[89] Il riferimento è a [Caccioppoli 1936].

[90] Vi è una lacuna nel dattiloscritto.

[91] Sembra potersi evincere che Caccioppoli abbia pronunciato un termine tedesco (lingua, pare, a lui nota): il termine potrebbe essere stato Umgebung (intorno) o forse Umkehrung (inversione).

[92] Ds: non più.

[93] Ds: e.

senso in cui una equazione lineare integrale in corrispondenza dell'autovalore presenta un numero infinito di autosoluzioni. Io ho esteso questo problema e nel caso di rango finito ho trattato il problema. Non so se si possa fare qualche cosa nei ranghi infiniti, ma ho paura che si vada troppo nel generale. Io ho supposto, cioè, in qualche modo che questa mancanza di invertibilità che portava le condizioni di polidromia nella trasformazione fosse locale a un numero *finito*[94] di variabili. Mi scuso che in questo momento ho paura azione lineare integrale in corrispondenza dell'autovalore presenta un numero infinito di autosoluzioni. Io ho esteso questo problema e nel caso di rango finito ho trattato il problema. Non so se si possa fare qualche cosa nei ranghi infiniti, ma

paura che si vada troppo nel generale. Io ho supposto, cioè, in qualche modo che ques*ta ma*ncanza di invertibilità che portava le condizioni di polidromia nella trasformazione fosse locale a un numero finito□ di variabili. Mi scuso che in questo momento ho paura voco fra i due spazi ad enne dimensioni, cioè avente per dimensioni il numero dell'autovalore. Qui veniva naturale servirsi della nozione di ordine di grado topologico. Contemporaneamente [*Leray e Schauder*][[95]] studiavano una questione analoga[96]. Però la studiavano dal punto di vista della seconda specie, come mi sono espresso prima e quindi riprendendo l'equazione $\psi = S(\varphi)$[97], poi passavano alla formula ... [$\varphi = S(\varphi)$].

[94] Ds: infinito.

[95] Ds: il dattiloscritto presenta l'annotazione di una lacuna e nel seguito la scritta (due nomi proprii).

[96] Il riferimento è al celebre lavoro [Leray - Schauder 1934] nel quale veniva estesa la "nozione di grado di una trasformazione secondo Brouwer a certe trasformazioni degli spazi funzionali lineari" ([Caccioppoli 1936]).

[97] Ds: Fi=Psi.

E di questa trasformazione *studiano*[98] quello che si chiama il grado topologico. Come si potrebbe dire in poche parole ? Se si prende uno spazio e lo si storce e lo si spiegazza e lo si applica sopra un altro spazio in modo che i punti del primo spazio cadano in una stessa posizione del secondo spazio, qualche altro cadrà bocconi, qualche altro cadrà supino. Facciamo la somma e questa ci darà il grado *della*[99] trasformazione.

Questa nozione di grado si estende agli spazi funzionali, però limitatamente a questa particolare formula di trasformazione e anche qui rimangono quelle limitazioni che indicano la trasformazione speciale. Invece colla trattazione[100] che io ho dato si hanno risultati se si vuole meno generali dal punto di vista topologico, ma molto più precisi dal punto di vista della caratterizzazione della soluzione. Del resto questo studio sulla caratterizzazione della soluzione e sul fenomeno che voi già vedete che si presenta delle diramazioni, delle biforcazioni, io penso adesso ai lavori di Poincaré sull'equilibrio delle masse fluide *ruotanti*[101] al quale credo che questo procedimento potrebbe applicarsi: penso all'altro problema di Poincaré e delle *geodetiche*[102] sopra una superficie convessa, per questo in questo caso dovrebbero nascere delle difficoltà ulteriori. Penso poi al problema che ho trattato io con successo, al problema di Plateau[103] nel senso della geometria differenziale. Il problema di Plateau è stato largamente trattato un tempo nel senso del Calcolo delle variazioni: Trovare la superficie di area minima. Questa non è tenuta ad essere superficie regolare, può avere delle variazioni.

[98] Ds: studiamo.

[99] Ds: di.

[100] Il riferimento è a [Caccioppoli 1936]. Per tale lavoro, che appare lacunoso si vedano le osservazioni contenute nella prefazione di [Caccioppoli 1963].

[101] Ds: ordinate.

[102] Ds: cioiodiche (???).

[103] Si veda nota 100.

Come si disporrebbero queste lamine con dei punti di diramazione ? Si è provata l'esistenza di queste superficie regolari le quali non forniscono più un minimo assoluto e qualche volta bisogna pur rassegnarsi a cercare qualche minimo relativo: E perché sempre minimo relativo ? Io ho trattato questo problema con questo procedimento partendo dal caso iniziale del cerchio e poi mettendo a raffronto la curva di un'altra superficie. Per passare da questo cerchio ad una curva qualsiasi occorre che questa curva non presenti nodi. Ho trovato che per una curva priva di nodi passa una superficie regolare minima. La trattazione è stata fatta in base a queste considerazioni. Lo studio ulteriore del fenomeno della biforcazione delle curve non è stato ancora intrapreso e potrebbe essere ricco di risultati.

Queste le applicazioni di questa teoria delle equazioni integrali e lineari per cui venivano dati soltanto dei criteri di esistenza diciamo così di tipo topologico, mentre noi abbiamo chiarito un poco la natura di queste soluzioni e anche della *molteplicità*[104] di queste soluzioni. Sono ricerche che si inquadrano in queste: quelle di *Schmidt*[105] sulle equazioni integrali nel campo analitico, quelle di Lichtenstein[106] sullo studio delle equazioni a derivate parziali. Queste ricerche sono appena all'inizio. E' un campo che io ritengo vastissimo, promettentissimo e vi chiedo scusa se ho avuto l'aria di tirare un poco l'acqua al nostro mulino, ma non si può parlare suggestivamente che delle cose nelle quali si crede. Io non so se sono riuscito a comunicarvi questa fede. Non è stato un metodo che vi ho mostrato, un metodo ben determinato, una specie di toccasana, un metodo bon a tout faire, ma un indirizzo generale che si fraziona in una serie di metodi che si perfezionano e si diramano in altri metodi a contatto con la diversa realtà dei problemi.

[104] Ds: moltiplicazione.

[105] Ds. Smith (???).
Il riferimento è a [Schmidt 1908].

[106] Il riferimento sembra essere a [Lichtenstein 1917]

Credo che possiamo ascrivere a nostro merito di aver affrontato una serie di problemi concreti e di aver portato in queste questioni un certo sano realismo proprio di noi italiani.

Dunque, concludendo, non metodo, ma indirizzo generale. Un punto di vista se volete; gusto potrà chiamarlo uno scettico, programma potrà chiamarlo un politico e, perché no ?, stato d'animo potrebbe chiamarlo un poeta, così come *Anouilh*[107] diceva che il paesaggio è uno stato d'animo e così un complesso di teorie potrebbe essere in ultima analisi uno stato d'animo. Ebbene, noi vi domandiamo per questo stato d'animo indulgenza ed anche un po' di simpatia.

(applausi)

(d) Le osservazioni di Severi

PROF. SEVERI

Io do rapidamente una espressione verbale al vostro applauso dicendo al prof. Caccioppoli che noi abbiamo compresa tutta la *finezza*[108] estetica del suo stato d'animo. Io come spirito geometrico mi sono molto compiaciuto della sua esposizione che è l'esposizione di un geometra. Caccioppoli ha dichiarato di non voler far uso delle fastidiose formule. Ora lo spirito geometrico consiste nel riconoscere la forza delle formule e nel far ricorso alle formule delle quali non si può fare a meno in certe contigenze, ma nel considerare le formule fastidiose nel senso che tutte le volte che se ne può fare a meno è meglio farne a meno, perché le formule sono un meccanismo che nasconde con facilità l'essenza del pensiero mentre invece quello che ci ha esposto Caccioppoli è stato l'essenza di

[107] Ds: Anouil.

un pensiero sintetico. Egli non mi sente naturalmente, perché Caccioppoli è spirito schivo, troppo schivo, so bene che queste mie espressioni non le gradisce affatto. Quindi lo prego di non sentire quello che dico.

E' certo che si vede come egli nel trattare i problemi di analisi ha sempre una visione sintetica e sanamente astratta dei problemi. Come sempre accade, quando si pronunciano delle frasi che sono troppo drastiche poi se ne deve fare la ritrattazione: voglio dire che quando ho affermato la mia scarsa simpatia verso la soverchia astrazione non intendevo certo parlare di quella astrazione sanissima la quale tende a sollevarsi al di sopra dei problemi singoli e a cercare di vedere questi problemi da un punto di vista più elevato uniformandone la situazione in un pensiero di carattere generale. Questa è la vera astrazione, quella che nasce *dalla*[109] visione dei problemi concreti e da questa visione dei problemi concreti cerca di assurgere ad una sintesi. Non l'astrazione fabbricata col metodo assiomatico, l'astrazione fabbricata attraverso quei meccanismi di cui noi ormai conosciamo il segreto. Sono piccole macchinette che suonano sempre allo stesso modo.

Questa dunque è l'astrazione che mi piace, perché attraverso di essa io vedo i problemi di analisi ridotti così in pillole suggestive che si possono mettere facilmente in tasca. Badate a quel problema della inversione delle trasformazioni a cui conduce la considerazione delle equazioni di primo grado: voi vedete il trionfo della forza dell'astrazione. Perché il passaggio alla relazione lineare per così dire osculatrice del problema che si considera non è altro che (come ha detto il prof. Caccioppoli) una forte astrazione e generalizzazione di quello che si fa nella ordinaria teoria delle funzioni e quella concezione così generale per la trasformazione della inversione della corrispondenza in una inversione in piccolo, in una inversione in grande, cioè il fatto che un insieme non compatto si muti in un insieme compatto, questo che

[108] Ds: finitezza.

appunto Caccioppoli ha enunciato, mi ha fatto sentire immediatamente il sapore del prolungamento analitico; esso nasce appunto attraverso una astrazione e in una generalizzazione del prolungamento analitico, astrazione e generalizzazione che non sono inutili perché, come ha detto Caccioppoli, permettono di trasportare le proprietà che sono state date finora nell'ambito delle funzioni analitiche in campo funzionale molto più vasto. E io ci credo che anche le teorie dei funzionali analitici di Fantappiè alle quali ha fatto allusione con parole lusinghiere che mi fanno piacere perché Fantappiè è un mio discepolo anche se ha preso una via diversa da quella che di solito prendono i miei discepoli, anche questa teoria, dicevo, io credo che possa dare risultati di grandissimo interesse oltre a quelli che ha già dato nel più ristretto campo delle funzioni analitiche.

Quindi io rinnovo al prof. Caccioppoli l'espressione della nostra gratitudine per questa esposizione così sintetica e confido che questa riunione porterà anche alla pubblicazione di questa comunicazione; perché noi abbiamo raramente il piacere di udire in Italia (specie oggi con le difficoltà che si incontrano a stampare i libri) delle esposizioni di carattere sintetico nei rami più interessanti della matematica moderna. Tanto più che il prof. Caccioppoli (che io non vedo più e che effettivamente deve essere sparito) è molto avaro di queste esposizioni che egli sa fare in modo magistrale sapendole condire con spunti di carattere artistico che fanno parte del suo squisito temperamento partenopeo. E noi ne abbiamo apprezzata tanta di questa sua finezza artistica. Ora io so che il prof. Caccioppoli ha fatto un magnifico corso sulle funzioni analitiche a Pisa, ma egli sollecitato a pubblicare se ne è schermito. Io rinnovo a lui la preghiera di voler pubblicare questo corso che ci sarà senz'altro utile.

[109] Ds: alla.

Il ricordo di uno dei presenti

di Giovanni Prodi.

Mi scuso se, come mi capita sempre più frequentemente con il procedere degli anni, attingo ai ricordi personali. Il convegno a cui mi riferisco fu organizzato nella tarda primavera del 1949 dal prof. Antonio Mambriani presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Parma. Il tema era quello dell'Analisi Funzionale. Il convegno durò una mattinata soltanto, ma fu vivacissimo. Il momento centrale fu la conferenza di Caccioppoli; era la prima volta che io lo incontravo, anche se mi erano già capitate tra le mani alcune di quelle sue note brevissime e dense di idee.

Ricordo che parlò della "foresta funzionale", in cui non ha senso studiare un albero da solo, anzi dai caratteri generali della foresta si può risalire a quelli di ciascun albero (ricordo bene ?). Poi ricordo che illustrò in termini suggestivi il teorema di Leray-Schauder e i risultati da lui ottenuti, indicandone le potentissime applicazioni. Seguì una conferenza di Cimmino, dedicata all'analisi funzionale lineare e, in particolare, al principio dell'alternativa. Ci fu anche un intervento tecnico di Zwirner ancora sul teorema di Leray-Schauder, dove per la prima volta sentii parlare di simplessi e di tecniche topologiche. Ci fu anche un intervento di G.Fichera, allora giovanissimo, che attirò gli elogi di F.Severi, il nume tutelare della matematica italiana. A Sua eccellenza F.Severi veniva spedito un telegramma di ossequio tutte le volte che i matematici italiani facevano qualche importante riunione. Ma allora era presente proprio lui, e parlava con la sua voce forte e con qualche ricercatezza letteraria.

Io avevo conseguito la laurea da pochi mesi; avevo avuto la fortuna di incontrare, proprio a Parma, Giovanni Ricci, maestro affascinante dotato di uno straordinario gusto matematico. Avevo già deciso di dedicarmi alla matematica, ma non avevo scelto ancora il campo; inoltre la mia cultura matematica, anche

per le vicissitudini di guerra, era rimasta ad un livello piuttosto modesto. A conclusione del convegno di Parma mi resi conto che l'analisi funzionale era ciò che cercavo; finite le conferenze, mi avvicinai timidamente al prof. Cimmino per chiedergli da quale libro cominciare. La risposta fu "Dal Banach". Cominciò così la mia fatica, fra la bellezza degli spazi funzionali e il sesto grado dei metodi transfiniti.

BIBLIOGRAFIA

[Bernstein 1910] Bernstein S., *Sur la généralisation du probléme de Dirichlet*, Math. Annalen 69, 1910, 82-136.

[Birkhoff-Kellogg 1922] Birkhoff G.D. - Kellogg D., *Invariant points in function space*, Trans. Am. Math. Soc. 23, 1922, 96-115.

[Caccioppoli 1931] Caccioppoli R., *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un' osservazione sui problemi ai limiti*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 13, 1931, 498-502 e Opere II, 34-38.

[Caccioppoli 1932a] Caccioppoli R., *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni*, Rend. Sem. Mat. Padova 3, 1932, 1-15 e Opere II, 39-52.

[Caccioppoli 1932b] Caccioppoli R., *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 16, 1932, 390-395 e 484-489; e Opere II, 56-68.

[Caccioppoli 1932c] Caccioppoli R., *Problemi non lineari in analisi funzionale*, Rend. Sem. Mat. Roma (3) 1, 1931-32, 13-22 e Opere II, 56-68.

[Caccioppoli 1933] Caccioppoli R., *Sulle equazioni ellittiche non lineari a derivate parziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 18, 1933, 103-106 e Opere II, 79-83.

[Caccioppoli 1934a] Caccioppoli R., *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 4 1934, 49-54 e Opere II, 106-112.

[Caccioppoli 1934b] Caccioppoli R., *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 19, 1934, 83-89 e Opere II, 98-105.

[Caccioppoli 1935] Caccioppoli R., *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti e sui problemi regolari del Calcolo delle variazioni*, Note I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 22, 1935, 305-310 e 376-379; e Opere II, 146-156.

[Caccioppoli 1936] Caccioppoli R., *Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau*, Note I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei (6) 24, 1936, 258-263 e 416-421; e Opere II, 157-169.

[Caccioppoli 1938] Caccioppoli R., *Sui teoremi di esistenza di Riemann*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 7, 1938, 177-187 e Opere II, 178-191.

[Caccioppoli 1940] Caccioppoli R., *Ovaloidi di metrica assegnata*, Commentationes Pontificiae Acc. Sc. 4, 1940, 1-20 e Opere II, 192-209.

[Caccioppoli 1950] Caccioppoli R., *Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali*, Giorn. di Mat. (4) 80, 1950-51, 186-212 e Opere II, 263-292.

[Caccioppoli 1963] Caccioppoli R., *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, voll. I, II, Edizioni Cremonese, Roma, 1963.

[Cafiero 1996] Cafiero F., *Opere Scelte*, a cura del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II", Giannini, Napoli 1996.

[Carbone-Guerraggio 1995] Carbone L.-Guerraggio A. (a cura di), *Aspetti della Matematica italiana del Novecento*, La Città del Sole, Napoli, 1995 (con interventi sulla figura di R.Caccioppoli da parte di P.de Lucia, C.Sbordone).

[Cimmino 1938] Cimmino G., *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 7, 1938, 73-96.

[Cimmino 1950] Cimmino G., *Inversione delle corrispondenze funzionali lineari ed equazioni differenziali*, Rivista di Mat. Univ. Parma 1, 1950, 105-116.

[Cimmino 1959] Cimmino G., *L'opera matematica di Renato Caccioppoli*, Boll. Un. Mat. It. 14, 1959, 548-551.

[Colaps 1980] Colaps M., *Busto di Renato Caccioppoli*, Il busto è attualmente collocato nella sede storica del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" in Via Mezzocannone, 8 in Napoli.

[De Val] De Val A. (pseudonimo di Aurisicchio A.), *Scultura in metallo di Caccioppoli*, Un'immagine della scultura è pubblicata in [Toma 1992].

[Fergola 1994] Fergola P. (a cura di), *Sulla figura di Renato Caccioppoli*, Tipolitografia Pesole, Napoli 1994 (con interventi di C.Ciliberto, P.Fergola, M.Curzio, S.Rionero, M.Valenzi, C.Sbordone, C.Meola, E.Sassi, M.Martone, F.Remondino, S.Bisogni, G.Volpicelli, R.Musto, F.Vitiello, R.La Capria, G.Marotta, I.Di Napoli, G.Guizzi, C.Petrella, E.Mincozzi, G.Boffi, e una ricca iconografia).

[Ghirelli-Gravagnuolo 1987] Ghirelli A.-Gravagnuolo M., Documentario realizzato per RAI 1, 1987.

[Guerraggio 1987] Guerraggio A. (a cura di), *La Matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Pitagora Editrice, Bologna 1987 (con interventi sulla figura di R.Caccioppoli di G.Scorza Dragoni e, parzialmente, di L.Amerio).

[Hadamard 1906] Hadamard J., *Sur les transformations ponctuelles*, Bull. Soc. Math. de France, 34, 1906.

[Istituto Italiano per gli Studi Filosofici 1989] Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, *Il pensiero Matematico del XX secolo e l'opera di Renato Caccioppoli*, nella sede dell'Istituto, Napoli 1989 (con interventi di G.Marotta, G.Pugliese Carratelli, G.Cimmino, E.De Giorgi, C.Sbordone, G.Scorza Dragoni e una ricca iconografia).

[Kneser 1914] Kneser R., *Belastete Integralgleichungen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 37, 1914, 169-197.

[Leray-Schauder 1934] Leray J.-Schauder J., *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 51, 1934.

[Lichtenstein 1917] Lichtenstein L., *Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I.* Monatshefte für Mathematik und Physik 28, 1917, 3-51.

[l'Unità 1952] l'Unità - 3 febbraio 1952, Lettera di Renato Caccioppoli al Direttore. Il testo è pubblicato in [Toma 1992].

[Mambriani 1950] Mambriani A. (nota redazionale), *Breve resoconto su il Convegno Matematico di Parma del 4 giugno 1949*, Riv. Di Mat. Univ. Parma 1, 1950, 1 (in calce).

[Marchi 1950] Marchi T., *Saluto ai partecipanti al Convegno Matematico di Parma del 4 giugno 1949*, Riv. di Mat. Univ. Parma 1, 1950, 99-100.

[Martone 1992] Martone M., *Morte di un matematico napoletano.*

[Miranda 1935a] Miranda C., *Teoremi di esistenza e unicità della superficie di assegnato bordo verificante un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine e applicazioni al problema di minimo per gli integrali doppi in forma parametrica*, Rend. Acc. Naz. Lincei 21, 1935, 253-260 e Opere II, 191-198.

[Miranda 1935b] Miranda C., *Sull'esistenza e l'unicità di una superficie di assegnato bordo verificante un'equazione a derivate parziali in forma parametrica*, Mem. Acc. Italia 6, 1935, 1023-1045, Opere I, 199-222.

[Miranda 1937] Miranda C., *Su un problema al contorno relativo all'equazione del calore*, Rend. Sem. Mat. Padova 9, 1937, 1-20 e Opere I, 303-322.

[Miranda 1938] Miranda C., *Alcune generalizzazioni delle serie di funzioni ortogonali e loro applicazioni*, Rend. Sem. Mat. Torino 7, 1938/40, 5-17 e Opere I, 361-374.

[Miranda 1949] Miranda C., *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale*, Quaderni matematici della Scuola Normale Superiore, Pisa 1949, ristampa 1975.

[Miranda 1959] Miranda C., *Renato Caccioppoli*, Annali di Mat. Pura e Appl. (4) 47, 1959, I-III e Opere II, 755-758.

[Miranda 1977] Miranda C., *Breve storia e prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 44, 1977, 1-38.

[Miranda 1992] Miranda C., *Opere scelte* a cura dell'Unione Matematica Italiana, I e II, Edizioni Cremonese, Roma 1992.

[Prodi-Ambrosetti 1973] Prodi G.-Ambrosetti A., *Analisi nonlineare I Quaderno*, Pubblicazione della classe di Scienze della Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973.

[Ricerche di Matematica 1991] *International Symposium Renato Caccioppoli Naples, September 20-22, 1989*, Ric. Di Mat. 40, 1991 Supplemento (atti raccolti a cura di D.Greco, A.Alvino, L.Carbone, C.Sbordone, G.Trombetti) (con interventi di D.Greco, C.Ciliberto, G.Fichera, P.de Lucia, M.Valenzi, G.Marotta, F.Guizzi, M.Torrini, A.Avantaggiati, M.Miranda, E.Vesentini).

[Rionero 1996] Rionero S., *Alcuni aspetti della Scuola matematica napoletana: fantasia matematica e proiezione internazionale*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli (4) 63, 1996, 131-148.

[Schauder 1934] Schauder J., *Zur Theorie Stetiger Abbildungen in Funtionalräumen*, Math. Zeitsch. 26, 1927, 47-65.

[Schauder 1934] Schauder J., *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Zeitschrift 38, 1934, 257-282.

[Schmidt 1908] Schmidt E., *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Math. Annalen 65, 1908, 370-399.

[Scorza Dragoni 1963] Scorza Dragoni G., *Renato Caccioppoli*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1963.

[Severi 1950] Severi F., *Parole di apertura al Convegno Matematico di parma del 4 giugno 1949*, Riv. di Mat. Univ. Parma 1, 1950, 101-104.

[Toma 1992] Toma P.A., *Renato Caccioppoli. L'enigma.* Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli 1992. Il volume contiene anche una ricca iconografia.

[Valenzi 1994] Valenzi M., *Renato Caccioppoli visto da Maurizio Valenzi, Sei bozzetti di Renato Caccioppoli, 1994.* (Un'immagine di questi bozzetti è pubblicata in [Fergola 1994]).