

Un contributo dell’algebra lineare all’elaborazione di classifiche sportive alternative

MAURIZIO BRUNETTI

Università di Napoli

E-mail: mbrunetti@unina.it

FRANCESCO D’ANDREA

Università di Napoli

E-mail: francesco.dandrea@unina.it

Sommario: *I risultati della Serie A del campionato italiano di calcio maschile 2015/2016 sono l’occasione per illustrare alcune tecniche di algebra. In particolare si presenta un metodo ‘dinamico’ di valutazione delle prestazioni sportive tramite vettori di Perron analogo a quello dell’algoritmo PageRank usato da GoogleTM per valutare la popolarità delle pagine web, nonché il confronto fra classifiche ottenute attraverso l’uso di metriche sugli insiemi di permutazioni (correlazione di Spearman e Kendall tau).*

Abstract: *Results and scores related to the 2015/2016 Serie A, the professional league competition for male football clubs located at the top of the Italian football league system, give the authors the opportunity to describe some algebra techniques. Specifically, we introduce a ‘dynamical’ method to rank teams relying on Perron vectors and resembling the PageRank algorithm used by Google to evaluate website’s popularity. We also show how to compare sport tables through two particular metrics on permutation sets: Spearman correlation and Kendall tau rank distance.*

1. – Introduzione

Nel fine settimana del 7-8 maggio 2016, le venti squadre appartenenti alla Serie A hanno disputato la penultima giornata del campionato italiano di calcio maschile 2015/2016. La Juventus che, prima dei fischi d’inizio, era in vetta alla classifica con più di dieci punti di distacco da ogni altra squadra, viene a sorpresa battuta 2-1 dall’Hellas Verona, ultima in classifica e con appena 4 vittorie all’attivo su 36 partite giocate. Un’altra partita, Inter-Empoli, termina ugualmente 2-1. L’esito, in questo

caso, era però ampiamente previsto, dato che la squadra vincente sopravanzava l’avversaria di più di venti punti nella graduatoria parziale di campionato.

Le *chance* di vittoria pronosticate per le due squadre erano differenti di molto⁽¹⁾, ma ai fini della classifica l’Inter e l’Hellas Verona sono state pre-

⁽¹⁾ Secondo i dati pubblicati sul portale ilsussidiario.net, la vittoria dell’Inter era data dall’agenzia di scommesse sportive Snai a 1,33 (sarebbe cioè stata pagata 1,33 volte la posta agli scommettitori che avessero puntato sulla vittoria della squadra neroazzurra); quella dell’Hellas Verona, invece, addirittura a 5.50. Cfr. le pagine web [1].

Accettato: il 6 novembre 2016.

miate allo stesso modo: com'è ben noto, il regolamento entrato in vigore per la serie A a partire dalla stagione 1994/1995 prevede, infatti, l'assegnazione di 3 punti in caso di vittoria, qualunque sia la 'forza' dimostrata nelle giornate precedenti dalla squadra sconfitta.

Tale 'forza' è ordinariamente stimata dagli analisti sportivi attraverso la comparazione di vari parametri oggettivi; fra questi: il numero di vittorie, la quantità di gol fatti e di gol subiti, nonché il tempo di 'possesso palla' nel corso delle partite giocate dall'inizio del campionato.

È lecito chiedersi se il vigente criterio di assegnazione di punti non possa essere migliorato, anche perché quello appena evidenziato non è il suo unico elemento di criticità. Prendiamo, infatti, in considerazione un ulteriore risultato relativo alla stessa giornata: Roma-Chievo 3-0. Rispetto alla prestazione dell'Inter e dell'Hellas Verona⁽²⁾, quella della Roma può considerarsi migliore in termini di a) *prolificità* (il numero, cioè, di gol segnati); b) *invulnerabilità* (computata in base al minor numero di gol subiti); c) *differenza reti* (la differenza, appunto, fra il numero di gol segnati e quello di gol subiti). Come spiegato nel Paragrafo 2, questa migliore *performance* della Roma avrebbe potenzialmente avuto qualche peso nella classifica solo nel caso in cui tale squadra, allo scadere dell'ultima giornata, si fosse trovata a pari punti con altre. Nella fattispecie concreta non è accaduto.

Alla classifica principale, la Federazione Italiana Giuoco Calcio (FGCI) ne affianca altre secondarie (cfr. il Paragrafo 5) utili all'eventuale compilazione delle cosiddette classifiche avulse (cfr. il Paragrafo 2).

Che si tratti della classifica principale o di quelle secondarie, le procedure di assegnazione dei punteggi assegnato alla singola squadra sono tutte – utilizzando un vocabolario tipico della Teoria dei Sistemi e dei Segnali (cfr. ad esempio [2, p. 29]) – *senza memoria* o *istantanee*: il punteggio assegnato alle singole squadre nella

t -esima giornata (l'*output* $y(t)$) dipende solo dai risultati conseguiti in quella giornata (l'*input* $x(t)$) e non anche da quelli delle giornate precedenti (gli *input* $\{x(t') \mid t' < t\}$).

Il Paragrafo 3 presenta gli strumenti matematici che consentono l'elaborazione di classifiche sportive nelle quali la posizione di una determinata squadra non dipende solamente dal 'secco' risultato di ogni singola partita disputata, ma anche dalla forza dimostrata da ogni singolo avversario durante l'intero campionato. La chiave di volta è costituita dal cosiddetto Teorema di Perron-Frobenius (1912), le cui potenzialità di applicazione nel mondo dello sport sono state intuite molto presto (cfr. [12]). Tale Teorema si è poi dimostrato fecondo in numerose discipline: dal calcolo delle probabilità (cfr. [3]), all'economia (cfr. [4] e [14]), alla demografia (cfr. [5]), alla bioinformatica (cfr. [15]), nonché alla formulazione dell'algoritmo Page-RankTM adottato dal motore di ricerca GoogleTM per misurare la popolarità di una pagina web (cfr. [8], [13], e [17, pp. 287-290]).

La cosa particolarmente intrigante è che, dato per acquisito il Teorema di Perron-Frobenius, le nozioni matematiche necessarie per arrivare alla formulazione di una classifica finale 'dinamica' sono relativamente elementari: la moltiplicazione di due matrici secondo il prodotto 'righe per colonne' e, fissata una matrice quadrata, la determinazione di un autovettore relativo a un suo autovalore. La *ratio* dell'algoritmo è dunque alla portata di chiunque abbia seguito un corso di Algebra Lineare di primo livello.

Il metodo dinamico di punteggio illustrato nel Paragrafo 3 dà luogo a una classifica alternativa del campionato di calcio 2015/2016 (cfr. la seconda colonna della Tabella 2) che dai tifosi interpellati dagli autori è stata percepita come ragionevolmente equa. L'applicazione dello stesso sistema a tornei sportivi *a gironi* – nei quali una singola squadra non è destinata a confrontarsi almeno una volta con *tutte* le altre che vi partecipano – potrebbe non risultare altrettanto felice e necessita di correttivi non lineari (cfr. [10]). Tale argomento esula dagli scopi di questo articolo, ma potrebbe costituire materia di riflessione a margine del prossimo campionato mondiale di calcio, il 21-esimo, che si giocherà in Russia nel 2018.

⁽²⁾ Nelle tabelle incluse in questo articolo, le due squadre scaligere ChievoVerona e Hellas Verona verranno denotate rispettivamente con Chievo e Verona.

2. – Le classifiche avulse

Per dirimere i casi di parità di punteggio a campionato concluso, l'art. 51 delle Norme Organizzative Interne della FGCI⁽³⁾ stabilisce il ricorso alla cosiddetta *classifica avulsa* fra le sole squadre dell'insieme

$$\mathcal{S}(p) = \{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_k\}$$

che abbiano tutte totalizzato il medesimo punteggio p . Tale classifica avulsa – si precisa – è valida ai fini tanto della classifica finale quanto dell'attribuzione dei titoli sportivi (scudetto, retrocessioni in Serie B, qualificazione nella Champions League o nella Uefa Europa League). Per la sua compilazione, si dovranno confrontare, nell'ordine:

- (1) i punti p'_i conseguiti dalla squadra \bar{q}_i negli scontri diretti con le squadre dell'insieme

$$\mathcal{S}(p) \setminus \{\bar{q}_i\};$$

- (2) la differenza d'_i tra le reti segnate e quelle subite dalla squadra \bar{q}_i in quegli stessi incontri;
- (3) la differenza d_i fra reti segnate e subite nell'intero campionato dalla squadra \bar{q}_i ;
- (4) il numero g_i di reti segnate nell'intero campionato dalla squadra \bar{q}_i ;
- (5) il sorteggio.

Il criterio (ℓ) viene preso in considerazione solo per dirimere gli eventuali casi di parità rispetto ai criteri da (1) a ($\ell - 1$). In altre parole, si introduce l'ordine lessicografico decrescente sull'insieme di quadruple

$$\mathcal{Q}(p) = \{(p'_i, d'_i, d_i, g_i) \mid i = 1, \dots, k\}$$

e si ricorre al sorteggio fra le squadre $\bar{q}_{h_1}, \dots, \bar{q}_{h_k}$ per le quali risulta

$$(p'_{h_i}, d'_{h_i}, d_{h_i}, g_{h_i}) = (p'_{h_j}, d'_{h_j}, d_{h_j}, g_{h_j}).$$

Per esempio, come si evince dalla colonna "Totale A" della Tabella 3, al termine della 38-esima giornata della stagione 2015/2016 la classifica presentava tre casi di parità:

$$\mathcal{S}(46) = \{\text{Empoli, Genoa}\}, \mathcal{S}(45) = \{\text{Atalanta, Torino}\} \text{ e } \mathcal{S}(39) = \{\text{Palermo, Udinese}\}.$$

Per fissare un ordinamento in $\mathcal{S}(46)$ sono stati influenti i soli criteri (1) e (2), dato che

$$p'_{\text{EMP}} = p'_{\text{GEN}} = 3, \quad \text{ma} \quad d'_{\text{EMP}} = 1 > d'_{\text{GEN}} = -1.$$

Per ordinare gli altri due insiemi – e così finalmente stilare la classifica complessiva definitiva – è stato risolutivo il solo criterio (1), giacché il Torino e il Palermo sono usciti vittoriosi da entrambi gli scontri diretti rispettivamente con l'Atalanta e con l'Udinese (cfr. la Tabella 2).

3. – Il vettore di Perron

La Serie A della Lega Nazionale Professionisti è a *girone unico*: ogni squadra che vi appartiene affronta ciascuna delle rimanenti due volte nel corso del campionato. La Tabella 1 – inserita insieme alle altre in coda all'articolo, cfr. pp. 12-16 – compendia l'esito di tutte le partite del campionato 2015/2016: dopo aver disposto le squadre $\{q_1, \dots, q_{20}\}$ in ordine alfabetico lungo le righe e lungo le colonne, nell'intersezione della riga i con la colonna j , si ritrova il risultato della partita in cui la squadra q_i (in casa) ha sfidato la squadra q_j (in trasferta).

La classifica di fine campionato può essere stilata considerando una *matrice delle preferenze* A con 20 righe e 20 colonne, nella quale l'elemento a_{ij} denoti il totale dei punti acquisiti dalla squadra q_i negli scontri contro la squadra q_j . Il ricorso alle classifiche avulse descritto nel Paragrafo 2 permette poi di dirimere i casi di eventuale parità di punteggio.

Per convenzione, la matrice $A = (a_{ij})$ così definita ha tutti zeri sulla diagonale principale, e può essere agevolmente compilata tenendo conto della Tabella 1:

⁽³⁾ Cfr. <http://www.figc.it/it/93/3817/Norme.shtml>.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 3 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 4 & 4 & 6 & 0 & 3 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 0 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 4 & 0 & 6 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 6 & 1 & 6 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & 3 & 6 & 4 & 0 & 6 & 1 & 4 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 6 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 3 & 6 & 4 & 4 & 6 & 0 & 3 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il punteggio globale totalizzato dalla squadra q_h è dato da

$$\sum_{j=1}^{20} a_{hj}.$$

Così, ad esempio, i 91 punti conseguiti dalla Juventus – la squadra vincitrice dello scudetto – si ottengono sommando gli elementi che sono sulla decima riga.

Come verrà spiegato in questo stesso paragrafo in un contesto più generale, per stilare una classifica finale alternativa che premi le squadre che hanno avuto buone *performance* contro squadre ‘forti’, basterà calcolare un autovettore di A relativo all’autovalore di valore assoluto massimo.

Si noti innanzitutto che, una volta fissato un criterio di punteggio, è possibile associare una matrice delle preferenze a un qualunque torneo sportivo fra n contendenti destinati ad affrontarsi 2 a 2.

Come nell’esempio fatto sopra, si può infatti considerare una matrice reale quadrata

$$S = (s_{ij})$$

di ordine n , il cui elemento generico $s_{ij} \geq 0$ rappresenti il ‘punteggio’ che la squadra q_i ha totalizzato in tutti gli incontri in cui si è opposta a q_j . Tale punteggio può essere misurato, tra i molti possibili criteri, con il

sistema attualmente previsto nei campionati di calcio italiani (3 punti per ogni vittoria, 1 per ogni pareggio, 0 punti per ogni sconfitta); con il numero di gol fatti (o di mete, o di canestri, a seconda dello sport considerato); o con i minuti di possesso palla.

Oltre a

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n s_{ij},$$

che in modo ‘diretto’ misura la forza di q_i dimostrata nel corso del torneo rispetto al criterio considerato, sarebbe auspicabile poter assegnare alla stessa squadra un voto alternativo $r_i \geq 0$ che, a differenza di \bar{r}_i , faccia tanto più pesare il punteggio s_{ij} quanto maggiore è il voto che spetta alla squadra q_j .

Traducendo in equazioni quest’ambizione, la stringa (che ci attendiamo non nulla)

$$\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$$

dovrebbe soddisfare

$$\lambda_0 r_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} r_j$$

per un qualche $\lambda_0 > 0$. Perché tale procedura dia luogo a una classifica ben definita, la stringa \vec{r} dovrebbe anche essere univocamente determinata a

meno di una costante di proporzionalità. Nel linguaggio tipico dell'algebra lineare, \vec{r} deve quindi risultare un autovettore destro della matrice S rispetto a un qualche autovalore λ_0 'privilegiato' fra quelli *semplifici*, cioè di molteplicità geometrica 1.

Nei termini precisati dal Teorema 2, le nostre aspettative sono destinate a essere soddisfatte se la matrice S è *primitiva*.

La definizione di *matrice primitiva* si trova nel Paragrafo 8.5 di [9]. La Proposizione 1 qui sotto, che è il Teorema 8.5.2 di [9], ne dà una caratterizzazione.

PROPOSIZIONE 1. – *Una matrice M con elementi non negativi è primitiva se e solo se, per qualche $k > 0$, M^k ha tutti gli elementi strettamente positivi.*

Tale Proposizione potrebbe sembrare di scarsa efficienza operativa. In realtà, gli eventuali k del suo enunciato vanno cercati in un insieme finito di interi dipendente dall'ordine di M (cfr. il Teorema 8.5.7 e il Corollario 8.5.8 in [9]). La matrice A sopra definita, per esempio, è primitiva: come si può verificare con Mathematica[®], gli elementi delle matrici A^k , già a partire da $k = 2$, sono tutti positivi.

TEOREMA 2. – *Sia $M \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice reale quadrata di ordine n , con elementi di matrice non negativi e primitiva. Allora:*

1. *esiste un unico autovalore λ_0 di valore assoluto massimo (la radice di Perron);*
2. *λ_0 è strettamente positivo e ha molteplicità algebrica 1;*
3. *esiste un autovettore \vec{r} associato a λ_0 con componenti strettamente positive, unico se imponiamo $\|\vec{r}\|_1 := \sum_{i=1}^n r_i = 1$ (in tal caso, è detto vettore di Perron).*

Il Teorema 2 compendia ciò che per le matrici primitive si deduce immediatamente dal Teorema di Perron-Frobenius (cioè il Teorema 8.4.4 in [9]), riguardante, più in generale, l'insieme delle matrici irriducibili. La teoria di Perron-Frobenius (senza dimostrazioni) è esposta anche nel Paragrafo 15.2 di [13].

Le componenti di tutti i vettori di Perron calcolati in questo articolo saranno tutte approssimate alla settima cifra decimale. Quelle del vettore 'Perron A' relativo, appunto, alla matrice A sono riportate nella colonna omonima della Tabella 3. Disponendole in

ordine decrescente, si ottiene una prima classifica alternativa (la colonna 'Perron A' della Tabella 4).

Pur posponendo al Paragrafo 7 la discussione sui parametri per stimare quanto questa classifica alternativa sia 'distante' da quella ufficiale (la colonna 'Totale A' della Tabella 4), osserviamo sin d'ora le inversioni più significative.

Il Palermo sostituisce il Carpi in zona retrocessione. Come mai? Delle dieci partite vinte dal Palermo solo in due casi (Palermo-Chievo e Palermo-Genoa) la squadra sconfitta poteva dirsi, alla luce del suo piazzamento nella classifica finale ufficiale, temibile. Il Carpi ha totalizzato una vittoria in meno del Palermo, ma ben quattro sono avvenute contro squadre 'temibili' nel senso appena precisato: Carpi-Empoli, Carpi-Genoa, Carpi-Torino, e Genoa-Carpi. Il vettore di Perron registra e premia queste sue prestazioni.

La classifica calcolata tramite il vettore di Perron manifesta un'altra clamorosa inversione: il Napoli scende al terzo posto a vantaggio della Roma. Ogni appassionato di calcio è in grado di indovinare il perché: gli scontri diretti fra le due squadre si sono conclusi, in un caso, con un pareggio e, nell'altro, con una vittoria della Roma. Se il 25 aprile 2016, a un minuto dal novantesimo, la Roma non avesse segnato il gol della vittoria, il Napoli avrebbe conservato il secondo posto anche nella nostra classifica alternativa, alla luce del vettore di Perron relativo alla matrice che si ottiene da A effettuando le seguenti sostituzioni

$$4 \rightsquigarrow 2 \text{ nel posto } (15, 13); \quad 1 \rightsquigarrow 2 \text{ nel posto } (13, 15).$$

Dal punto di vista concettuale, non vi è alcuna ragione perché una matrice S di fine torneo debba necessariamente risultare primitiva. In teoria, potrebbe infatti accadere che, nel corso di un intero campionato, una squadra $q_{\bar{h}}$ perda sistematicamente tutte partite, oppure che – all'opposto – una squadra $q_{\bar{k}}$ le vinca tutte. In questo assai improbabile caso⁽⁴⁾,

⁽⁴⁾ In un campionato con 20 squadre, la probabilità teorica che almeno uno dei due eventi accada è di

$$\frac{1}{3^{19}} \left(2 - \frac{1}{3^{38}} \right).$$

Tale probabilità è di ottanta volte inferiore a quella di 'fare 14' al Totocalcio giocando una sola colonna.

la matrice A e tutte le sue potenze conterrebbero una riga nulla (la \bar{h} -esima) o una colonna nulla (la \bar{k} -esima).

Negli 84 campionati di Serie A a girone unico finora disputati, eventi del genere non si sono mai verificati. Di fatto, è del tutto ragionevole che gli zeri contenuti in una matrice delle preferenze associata a un campionato di calcio siano pochi e sparsi quanto basta da assicurarne la primitività.

Il lettore esperto sa che anche l'algoritmo PageRank per calcolare la popolarità di una pagina web consiste essenzialmente nel calcolo di un vettore di Perron a partire da una matrice G opportuna descritta, per esempio, in [8] e in [13]. Si noti, comunque, che la matrice di GoogleTM G è una matrice resa stocastica (la somma degli elementi su ogni riga è uguale a 1), mentre la matrice S descritta in questo paragrafo, ovviamente, non lo è.

È naturale chiedersi se il metodo proposto in questo paragrafo per stilare una classifica alternativa di fine campionato possa essere utilizzato anche per redigere classifiche provvisorie a mano a mano che il campionato avanza.

Certamente si può considerare una matrice delle preferenze $A(t)$ nella quale l'elemento $a_{ij}(t)$ denoti il totale dei punti acquisiti dalla squadra q_i negli scontri contro la squadra q_j fino alla t -esima giornata inclusa, ponendo per convenzione $a_{ij}(t) = 0$ nel caso in cui le squadre q_i e q_j non si siano ancora confrontate. La matrice di fine campionato, adottando questa notazione, sarebbe $A(38)$.

Naturalmente, minore è il numero di giornate disputate, maggiore è la probabilità che la matrice $A(t)$ non sia primitiva, a causa dell'elevato numero di zeri. Nel caso del PageRank esistono metodi, come quello del *random surfer*, per rendere primitiva una matrice che non lo è. La loro applicazione al campionato di calcio non appare però giustificabile.

Si noti comunque che, avendo le matrici $A(t+1) - A(t)$ per $1 \leq t < 38$ elementi tutti non negativi, se per qualche \bar{t} la matrice $A(\bar{t})$ è primitiva, lo sono anche tutte le matrici $A(t)$ con $t > \bar{t}$. Perciò è lecito attendersi, nel senso spiegato alcuni capoversi più sopra, che si possano stilare classifiche provvisorie con il metodo del vettore di Perron da una certa giornata in poi.

4. – Quel punto in più alle vittorie

In Italia, l'assegnazione alla vittoria di 3 punti invece di 2 fu introdotta in via sperimentale nella stagione 1993-1994 per le Serie C1 e C2. Dalla stagione successiva l'innovazione fu estesa a tutte le altre divisioni. L'auspicio era che il punto in più alla vittoria spingesse le squadre a osare, a correre il rischio della vittoria anche a costo della sconfitta, scoraggiando le chiusure 'a catenaccio' in difesa e gli 0-0 che diminuivano la spettacolarità degli incontri. Ha senso chiedersi quale sarebbe stata la classifica finale del campionato 2015/2016 se, a parità di Tabellone, il meccanismo dei punteggi fosse stato quello in vigore negli anni Ottanta. La relativa matrice delle decisioni B può essere redatta facendo le seguenti sostituzioni nella matrice A del Paragrafo 3:

$$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 \rightsquigarrow 0, & 0 + 1 = 1 \rightsquigarrow 1, & 1 + 1 = 2 \rightsquigarrow 2, \\ 0 + 3 = 3 \rightsquigarrow 2, & 1 + 3 = 4 \rightsquigarrow 3, & 3 + 3 = 6 \rightsquigarrow 4. \end{array}$$

Il punteggio finale che la squadra q_i avrebbe totalizzato, fornito dalla somma degli elementi sulla riga i -esima della matrice B , è riportato nella colonna 'Totale B' della Tabella 3.

Diminuendo l'ampiezza dell'intervallo dei punteggi, non sorprende che aumentino i casi di parità da dirimere con i criteri esposti nel Paragrafo 2. In 4 casi di parità su 5 è sufficiente considerare i diversi punteggi ottenuti negli scontri diretti. Più delicato è stabilire un ordinamento fra Carpi, Palermo e Udinese, tutte e tre a 29 punti: in tale classifica avulsa l'Udinese sarebbe certamente terzo in base ai punti totalizzati negli scontri diretti. Poiché le partite fra il Carpi e il Palermo si sono concluse con due pareggi, l'assegnazione del primo posto al Carpi dipende dalla migliore sua resa in termini di differenza reti nel corso del campionato (cfr. la colonna E della Tabella 3). La classifica finale è riportata nella colonna 'Totale B' della Tabella 4.

In numero delle inversioni fra la classifica 'Totale B' rispetto a quella ufficiale è, com'era prevedibile, molto piccolo. Due fra queste, tuttavia, sono molto rilevanti perché avvengono agli estremi della classifica: l'Udinese e non il Carpi sarebbe retrocesso in Serie B; inoltre la Roma e non il Napoli sarebbe finita al secondo posto, causando una perdita della

Società Sportiva Calcio Napoli stimata fra i 12 e i 50 milioni di euro a vantaggio, ovviamente dell'Associazione Sportiva Roma SpA⁽⁵⁾.

Poichè la matrice $B \cdot B$ ha elementi tutti positivi, per la Proposizione 1 e il Teorema 2 ha senso calcolare il vettore di Perron relativo a B (colonna Perron B della Tabella 3) e quindi stilare la classifica corrispondente 'Perron B' della Tabella 4.

Il vettore Perron B premia, come si vede l'Udinese, unica – fra le squadre di bassa classifica – a poter vantare una vittoria contro una squadra forte come il Napoli. Quanto il dato Udinese-Napoli 3-1 sia sensibile può essere verificato calcolando il vettore di Perron rispetto a una matrice B' ottenuta da B effettuando le seguenti sostituzioni:

$2 \rightsquigarrow 3$ nel posto (13, 19); $2 \rightsquigarrow 1$ nel posto (19, 13).

Si sta, in altri termini, considerando la matrice delle preferenze B' di una situazione virtuale nella quale la partita Udinese-Napoli si è conclusa in parità. In accordo alle aspettative, nella risultante classifica dinamica, l'Udinese torna contigua al Carpi e al Palermo.

5. – Implementazione delle classifiche ausiliarie

Gli analisti sportivi valutano la potenza di una squadra anche in base alla dimostrata prolificità, cioè al numero di gol segnati in campionato. Un ulteriore fattore che viene preso ordinariamente in considerazione per la valutazione soprattutto di singole *performance* è la differenza reti.

Come per il calcio (lo si è visto nel Paragrafo 2), i criteri di prolificità e di differenza reti vengono utilizzati per la compilazione di classifiche ausiliarie utili a dirimere casi di parità rispetto al punteggio principale anche in altri sport come la pallacanestro

⁽⁵⁾ Le cifre sono ottenute considerando le differenti quote di diritti televisivi e il premio UEFA che spetta alle squadre che accedono alla Champions League 2016-2017. L'ingresso della seconda classificata ai gironi della Champions è garantita, ma non quello della terza. Per le stime in euro, cfr. per esempio <http://www.ilgiornale.it/news/sport/secondo-o-terzo-balla-tesoretto-50-milioni-1257007.html>.

e il rugby (dove, ovviamente si parla di *differenza canestri* e di *differenza mete*).

Seguendo la procedura esposta nel Paragrafo 3, si prenderanno ora in considerazione le matrici delle preferenze C (rispetto alla prolificità) ed E (rispetto alla differenza reti). Ordinate ancora una volta le squadre $\{q_1, \dots, q_{20}\}$ di Serie A in ordine alfabetico, l'elemento $c_{i,j}$ della matrice

$$(2) \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & \dots \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & \dots \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

esibisce il numero totale di gol segnati dalla squadra q_i nei due incontri disputati contro la squadra q_j . Tale matrice può essere facilmente compilata a partire dalla Tabella 1. L'elemento generico e_{ij} della matrice E , invece, può essere determinato semplicemente osservando che, per definizione, si ha

$$e_{ij} = c_{ij} - c_{ji}.$$

Il numero totale di gol segnati dalla squadra q_h è dato dalla somma degli elementi che in C stanno sulla h -esima riga. La colonna 'Totale C ' della Tabella 4 elenca le squadre in ordine di prolificità. Per dirimere i tre casi di parità si ricorre ancora una volta al metodo delle classifiche avulse esposto nel Paragrafo 2: la Lazio ha totalizzato più punti del Torino negli scontri diretti; quanto ai casi di parità Frosinone-Udinese e Milan-Sassuolo, lasciamo all'appassionato lettore la verifica di come occorra e basti applicare il criterio della differenza reti negli scontri diretti per vedere premiati nelle rispettive classifiche avulse il Frosinone e il Sassuolo.

In base alla colonna E della Tabella 3, non vi sono squadre con ugual numero di differenza reti, perciò è bastato riordinare le squadre in base all'ordine decrescente dei suoi valori per stilare la colonna 'Totale E ' della Tabella 4.

La matrice E possiede elementi negativi e, come tutte le matrici antisimmetriche reali, non ha alcun autovalore reale non nullo. Non ha quindi senso cercare qualcosa di analogo al vettore di Perron.

La matrice C , invece, è non negativa e primitiva: si può infatti verificare che la matrice $C \cdot C$ ha elementi tutti strettamente positivi. Per la matrice

C si può dunque invocare la Proposizione 1 e calcolare il vettore di Perron. Le sue componenti costituiscono la colonna ‘Perron C ’ della Tabella 3.

Che la Roma e il Napoli abbiano sopravanzato la Juventus in prolificità – o, come anche si dice, nella classifica del *miglior attacco* – non è sfuggito alle pubblicazioni e ai siti specializzati. Il vettore di Perron conferma che alla Roma spetta la palma dell’efficacia offensiva anche tenendo in considerazione la qualità delle squadre di cui è riuscita a violare la porta.

Confrontando la classifica di prolificità ‘Totale C ’ con quella dinamica ‘Perron C ’, spicca l’inversione del Frosinone con il Bologna, che è stata la squadra meno prolifica in assoluto. L’algebra lineare premia il Bologna per i tre gol che è riuscita a segnare contro il Napoli e per i due fuori casa contro il Sassuolo. Nel corso del campionato, il Frosinone ha segnato – è vero – due gol in più del Bologna, ma mai contro squadre altrettanto forti.

A priori non si può concludere che, a fine campionato, la matrice C di prolificità risulti necessariamente irriducibile. Infatti, nulla esclude che una squadra concluda il campionato senza aver segnato neanche un gol. In questo caso, la matrice C e tutte le sue potenze avrebbero una riga nulla. Al contrario, se una squadra terminasse il campionato senza che la propria porta fosse stata mai violata, ciò comporterebbe l’annullarsi di una colonna di C e delle sue potenze. Anche in questo caso si tratta di eventi molto improbabili e, in ogni caso, mai accaduti nella storia del calcio italiano.

6. – Prolificità vs. invulnerabilità

La Juventus si piazza terza rispetto a entrambe le classifiche stilate in base alla prolificità, ma prima rispetto a quella della differenza reti. Ciò, ovviamente, è dovuto al suo alto grado di *invulnerabilità*, un parametro dato dal numero di gol subiti. La porta della Juventus, nella stagione 2015/2016, è stata violata solo 20 volte. La squadra ha così eguagliato un record che aveva già raggiunto nel campionato 2011/2012⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ Il numero di soli 20 gol subiti costituisce un record di invulnerabilità nella storia dei campionati di Serie A a 20 squadre. I tornei disputati nelle ultime 12 stagioni dalla massima divisione professionistica sono stati tutti a 20 squadre.

Rispetto al criterio di invulnerabilità – detto anche *di miglior difesa* –, la matrice delle preferenze D si ottiene ponendo nel posto (i, j) il totale di gol subiti dalla squadra q_i nelle partite disputate contro la squadra q_j . Considerando le matrici C ed E definite nel Paragrafo 5, dalla definizione segue immediatamente che

$$D = C^T.$$

La matrice D , cioè, è la trasposta della matrice C . Inoltre,

$$E = C - C^T = C - D.$$

Essendo l’una la trasposta dell’altra, se C è irriducibile lo è anche D . Le matrici C e D hanno inoltre gli stessi autovalori, ma non gli stessi autovettori destri. Stavolta, bisognerà disporre le componenti del vettore di Perron di $D = C^T$ in ordine crescente per ottenere una classifica delle squadre dalla più invulnerabile alla più vulnerabile.

Confrontando le colonne ‘Totale D ’ e ‘Perron D ’ non si notano inversioni di rilievo: ogni squadra si sposta in classifica di al più due posti. Il buon piazzamento del Bologna in entrambe, nonostante la sua bassa prolificità, spiega la sua salvezza dalla zona retrocessione.

Le colonne di tipo C e D della Tabella 4 mostrano come l’Inter e la Roma abbiano dimostrato criticità speculari (tradottesi alla lunga, in un allontanamento dalla zona scudetto): la prima si è dimostrata brillante in difesa, ma non altrettanto in attacco; la seconda si è distinta in prolificità, ma la sua difesa si è rivelata alquanto vulnerabile.

In questo lavoro si resisterà alla tentazione di proporre una classifica ‘ideale’ composta effettuando una media pesata fra quelle finora considerate. Il lettore potrà farlo da solo, magari servendosi della Tabella 5 e attribuendo a ciascuna classifica il peso che riterrà più ragionevole. Un’operazione del genere è inerente a quella branca della Ricerca Operativa nota come ‘Analisi delle decisioni con criteri multipli’, per la quale si rimanda a [11].

In ogni caso, un confronto globale anche solo *visivo* di tutte le classifiche considerate risulta particolarmente beffardo per il Carpi, presente in uno degli ultimi tre posti *solo* in quella ufficiale – l’unica, purtroppo per lei, che ha effetti concreti ai fini della retrocessione in Serie B .

7. – Due metriche sull'insieme delle classifiche

Ricordiamo che una permutazione σ di n oggetti è una corrispondenza biunivoca $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, ovvero una n -upla $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ di interi fra 1 e n distinti, e che le permutazioni formano un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni, che indicheremo con \mathfrak{S}_n . Una volta definito un ordinamento standard – per esempio quello alfabetico – sull'insieme delle n squadre che partecipano a un torneo sportivo, vi è una corrispondenza biunivoca naturale che associa ad ogni classifica una permutazione di n oggetti: l'intero $\sigma(i)$ in questo caso rappresenterà la posizione in classifica della i -esima squadra, in ordine alfabetico. Nella Tabella 5, ad esempio, nella prima colonna si può leggere la permutazione

(13, 14, 18, 9, 10, 5, 19, 11, 4, 1, 8, 7, 2, 16, 3, 15, 6, 12, 17, 20)

corrispondente alla classifica ufficiale. La Tabella 5 traduce le nove classifiche da noi considerate in altrettante permutazioni.

Per 'misurare' di quanto differiscono due classifiche, si può introdurre una metrica sull'insieme \mathfrak{S}_n . La corrispondenza classifiche-permutazioni dipende dalla scelta di un ordinamento standard. Poiché tale scelta è solo una convenzione, cerchiamo una distanza che al contrario sia indipendente da essa: in termini tecnici, vogliamo una distanza 'invariante' sul gruppo \mathfrak{S}_n . Una ovvia distanza invariante d_E è quella Euclidea, data da

$$(3) \quad d_E(\sigma, \sigma') = \left(\sum_{i=1}^n |\sigma(i) - \sigma'(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Ogni singolo addendo della somma che definisce d_E è tanto più grande quanto maggiore è la differenza di posto che la squadra i occupa nella 'classifica' σ rispetto alla 'classifica' σ' .

Notiamo che (3) è anche uguale alla distanza fra i vettori di componenti $\sigma(i) - \frac{n+1}{2}$ e $\sigma'(i) - \frac{n+1}{2}$. La distanza è massima quando i due vettori sono paralleli con verso opposto, ovvero

$$\sigma(i) - \frac{n+1}{2} = - \left(\sigma'(i) - \frac{n+1}{2} \right).$$

In altre parole, σ' è a distanza massima da σ se ottenuta da essa invertendo l'ordine della classifica:

$$\sigma'(i) = n + 1 - \sigma(i).$$

(La prima squadra diventa l'ultima, la seconda la penultima, ecc.) Usando la precedente relazione, si può calcolare facilmente il valore massimo della distanza, ovvero il *diametro* dello spazio metrico (\mathfrak{S}_n, d_E) . Si ha

$$\text{diam}(\mathfrak{S}_n, d_E)^2 = \sum_{k=1}^n (n + 1 - 2k)^2 = \frac{1}{3}(n^3 - n),$$

in cui abbiamo chiamato $k = \sigma'(i)$.

Un'altra distanza naturale sulle permutazioni è quella che conta il numero di inversioni. Data una coppia (σ, σ') di permutazioni, una *inversione* è una coppia (i, j) tale che $\sigma(i) < \sigma(j)$ e $\sigma'(i) > \sigma'(j)$. Il numero totale di inversioni, indicato con $N_{\text{inv}}(\sigma, \sigma')$, è una metrica invariante su \mathfrak{S}_n .

Anche in questo caso, si dimostra facilmente per induzione che il numero massimo di inversioni si ha quando le classifiche σ e σ' sono invertite, e tale massimo è pari a

$$\text{card}\{1 \leq i < j \leq n\} = \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

Data una metrica d su \mathfrak{S}_n qualsiasi, si può convertire in una *correlazione* come segue:

$$(4) \quad \text{corr}(\sigma, \sigma') := 1 - 2 \frac{d(\sigma, \sigma')}{\text{diam}(\mathfrak{S}_n, d)}.$$

La correlazione varia da -1 a $+1$: vale $+1$ se $\sigma = \sigma'$ e -1 se la 'differenza' fra σ e σ' è massima. Nel caso della distanza N_{inv} la correlazione associata prende il nome di *Kendall tau*, e si può scrivere con una manipolazione algebrica nella forma:

$$\tau_n(\sigma, \sigma') = \frac{2}{n^2 - n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}(\sigma(i) - \sigma(j)) \text{sign}(\sigma'(i) - \sigma'(j)).$$

Se in (4) si usa invece di una metrica il *quadrato* della distanza Euclidea, si ottiene il *coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman* [7], dato da:

$$\rho_n(\sigma, \sigma') = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n |\sigma(i) - \sigma'(i)|^2.$$

Quest'ultimo può essere riscritto nella forma

$$\rho_n(\sigma, \sigma') = \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma(i) - m)(\sigma'(i) - m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma(i) - m)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma'(i) - m)^2}},$$

dove

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma'(i) = \frac{1}{2}(n + 1)$$

è il valor medio delle permutazioni. In questa forma si riconosce quella che è usualmente chiamata correlazione in statistica: il rapporto fra covarianza e deviazione standard di σ e σ' .

Criteri alternativi per stimare la somiglianza fra due classifiche, come per esempio la distanza 'footrule' di Spearman, si trovano nei capitoli 11 e 17 di [6]. La correlazione γ di Goodman e Kruskal viene descritta invece in [16, p. 487].

Nelle matrici seguenti è riportata la correlazione di Spearman e Kendall fra le varie classifiche considerate. Trattandosi di funzioni simmetriche che valgono 1 sulla diagonale principale, si riporteranno solo gli elementi sopra la diagonale principale. Le righe e le colonne etichettate con TA, TB, TC, TD e TE si riferiscono alle classifiche da 'Totale A' a 'Totale E' della Tabella 4. Le righe e le colonne PA, PB, PC e PD corrispondono invece alle classifiche (sempre in Tabella 4) elaborate in base ai vettori di Perron.

Correlazione di Spearman

	TA	PA	TB	PB	TC	PC	TD	PD	TE
TA		0.96	0.98	0.97	0.87	0.85	0.92	0.91	0.98
PA			0.97	0.99	0.80	0.80	0.95	0.93	0.97
TB				0.98	0.86	0.84	0.93	0.93	0.98
PB					0.81	0.81	0.95	0.93	0.97
TC						0.95	0.69	0.68	0.89
PC							0.71	0.70	0.88
TD								0.98	0.93
PD									0.92
TE									

Correlazione di Kendall

	TA	PA	TB	PB	TC	PC	TD	PD	TE
TA		0.87	0.94	0.88	0.71	0.66	0.76	0.77	0.92
PA			0.89	0.95	0.64	0.66	0.84	0.79	0.89
TB				0.93	0.71	0.66	0.80	0.81	0.92
PB					0.63	0.65	0.85	0.80	0.88
TC						0.83	0.53	0.52	0.73
PC							0.53	0.52	0.73
TD								0.91	0.80
PD									0.79
TE									

Le classifiche che più si assomigliano sono la PA e la PB, anche se alcune inversioni – come già rilevato nel Paragrafo 4 – avvengono agli estremi della classifica e avrebbero un rilievo non piccolo sui bilanci finanziari delle squadre coinvolte. Questo è il motivo per cui in qualche caso si preferisce adottare correlazioni in cui le inversioni che avvengono al

centro della classifica hanno un peso minore di quelle coinvolgono le sue estremità.

Entrambe le correlazioni mostrano livelli massimi di discordanza tra le classifiche di tipo C (prolificità) e quelle di tipo D (invulnerabilità). Evidentemente, il non avere un attacco e una difesa di pari brillantezza è stata una caratteristica che l'Inter e la

Roma hanno condiviso con altre squadre (per esempio la Lazio e il Torino).

Terminiamo questo paragrafo, dedicato al confronto delle classifiche, con una grafico che mostra il *range* di piazzamenti di ogni singola squadra nelle nove classifiche prese in esame.

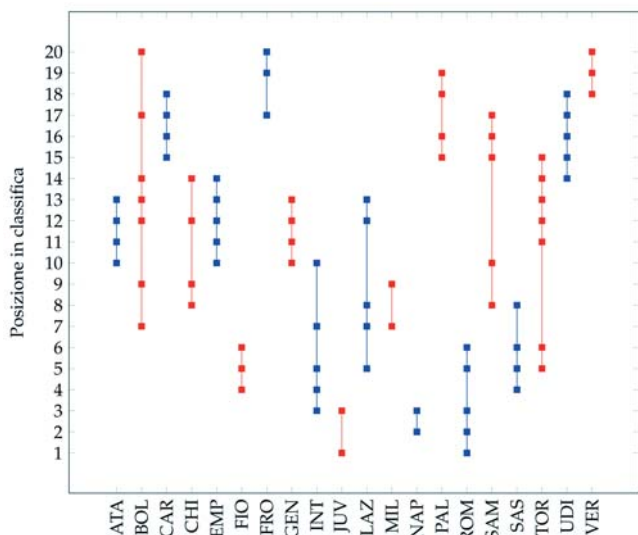


FIG. 1

Ringraziamenti

Ringraziamo i referee anonimi per le loro osservazioni su una versione preliminare di questo articolo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Pronostici sportivi 37^a giornata:

- (1) <http://www.ilsussidiario.net/News/Calcio-e-altri-Sport/2016/5/7/Pronostici-Serie-A-Le-scommesse-sulle-partite-della-37-giornata-gli-anticipi-sabato-7-maggio-2016-/701999/>

- (2) <http://www.ilsussidiario.net/News/Calcio-e-altri-Sport/2016/5/8/Pronostici-Serie-A-Le-scommesse-sulle-partite-della-37-giornata-domenica-8-maggio-2016-/702004/>

- [2] H. J. BESSAI, *Mimo Signals and Systems*, Springer 2005, ISBN:0387234888.
- [3] P. BRÉMAUD, *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer 1999, ISBN:9781441931313.
- [4] S. BOWLES, *Technical Change and the Profit Rate: A Simple Proof of the Okishio Theorem*, Cambridge J. Econ., 5 (1981), 183–186.
- [5] H. CASWELL, *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation*, 2a ed., Sinauer Associates 2001, ISBN:0878930965.
- [6] M. M. DEZA e E. DEZA, *Encyclopedia of Distances*, Springer 2009, doi:10.1007/978-3-642-00234-2.
- [7] P. DIACONIS e R. L. GRAHAM, *Spearman's Footrule as a Measure of Disarray*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 39, no. 2 (1997), 262–268.
- [8] P. F. GALLARDO, *Google's Secret and Linear Algebra*, EMS Newsletter 63 (2007), 10–15.
- [9] R. A. HORN e C. R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press 2012, ISBN:978-0521548236.
- [10] J. P. KEENER, *The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams*, SIAM Review (SIAM) 35 (1993), no. 1, 80–93, doi:10.1137/1035004.
- [11] R. L. KEENEY e H. RAIFFA, *Decisions with Multiple Objectives*, Cambridge Univ. Press 1993, ISBN:9780521438834.
- [12] E. LANDAU, *Über Preisverteilung bei Spieltournieren*, Zeitschrift für Mathematik and Physik, 63 (1914) no. 1, 192–202.
- [13] A. N. LANGVILLE e C. D. MEYER, *Google's PageRank And Beyond*, Princeton Univ. Press 2006, ISBN:9780691122021.
- [14] W. W. LEONTIEF *Input-output Economics*, Oxford Univ. Press 1986, ISBN:0195035275.
- [15] J. L. MORRISON, R. BREITLING, D. J. HIGHAM e D. R. GILBERT, *GeneRank: Using search engine technology for the analysis of microarray experiments*, BMC Bioinformatics, 6:233 (2005).
- [16] J. L. MYERS, A. D. WELL e R. F. LORCH Jr., *Research Design and Statistical Analysis*, 3a ed., Routledge 2010, ISBN:9780805864311.
- [17] E. SALINELLI e F. TOMARELLI, *Modelli dinamici discreti*, 3a ed., Springer 2014, ISBN:9788847055049.

TABELLA 1. – Tabellone del campionato di Serie A 2015/2016

	ATA	BOL	CAR	CHI	EMP	FIO	FRO	GEN	INT	JUV	LAZ	MIL	NAP	PAL	ROM	SAM	SAS	TOR	UDI	VER
Atalanta	2-0	3-0	1-0	0-0	0-0	2-3	2-0	0-2	1-1	0-2	2-1	2-1	1-3	3-0	3-3	2-1	1-1	0-1	1-1	1-1
Bologna	3-0	0-0	0-1	2-3	1-1	1-0	1-0	2-0	0-1	0-0	2-2	0-1	3-2	0-1	2-2	3-2	0-1	0-1	1-2	0-1
Carpi	1-1	1-2	1-2	1-0	0-1	0-1	2-1	4-1	1-2	2-3	1-3	0-0	0-0	1-1	1-3	2-1	1-3	2-1	2-1	0-0
Chievo	1-0	0-0	1-0	1-1	0-0	0-0	5-1	1-0	0-1	0-4	4-0	0-0	0-1	3-1	3-3	1-1	1-1	1-0	2-3	1-1
Empoli	0-1	0-0	3-0	1-3	2-0	2-0	1-2	2-0	0-1	1-3	1-0	2-2	2-2	0-0	1-3	1-1	1-0	2-1	1-1	1-0
Fiorentina	3-0	2-0	2-1	2-0	2-2	4-1	4-1	1-0	2-1	1-2	1-3	2-0	1-1	0-0	1-2	1-1	3-1	2-0	3-0	1-1
Frosinone	0-0	1-0	2-1	0-2	2-0	0-0	0-0	2-2	0-1	0-2	0-0	2-4	1-5	0-2	0-2	2-0	0-1	1-2	2-0	3-2
Genoa	1-2	0-1	1-2	3-2	1-0	0-0	4-0	1-0	1-0	0-2	0-0	1-0	0-0	4-0	2-3	2-3	2-1	3-2	2-1	2-0
Inter	1-0	2-1	1-1	1-0	2-1	1-4	4-0	1-0	0-0	0-0	1-2	1-0	2-0	3-1	1-0	3-1	0-1	1-2	3-1	1-0
Juventus	2-0	3-1	2-0	1-1	1-0	3-1	1-1	1-0	2-0	0-0	3-0	1-0	1-0	4-0	1-0	5-0	1-0	2-1	0-1	3-0
Lazio	2-0	2-1	0-0	4-1	2-0	2-4	2-0	2-0	2-0	0-2	0-2	1-3	0-2	1-1	1-4	1-1	0-2	3-0	2-0	5-2
Milan	0-0	0-1	0-0	1-0	2-1	2-0	3-3	2-1	3-0	1-2	1-1	0-4	0-4	3-2	1-3	4-1	2-1	1-0	1-1	1-1
Napoli	2-1	6-0	1-0	3-1	5-1	2-1	4-0	3-1	2-1	2-1	5-0	1-1	1-1	2-0	0-0	2-2	3-1	2-1	1-0	3-0
Palermo	2-2	0-0	2-2	1-0	0-1	1-3	4-1	1-0	1-1	0-3	0-3	0-2	0-1	2-4	2-4	2-0	0-1	1-3	4-1	3-2
Roma	0-2	1-1	5-1	3-0	3-1	4-1	3-1	2-0	1-1	2-1	2-0	1-1	1-0	5-0	2-1	2-1	2-2	3-2	3-1	1-1
Sampdoria	0-0	2-0	5-2	0-1	1-1	0-2	2-0	0-3	1-1	1-2	2-1	0-1	2-4	2-0	2-1	1-3	1-3	2-2	2-0	4-1
Sassuolo	2-2	0-2	1-0	1-1	3-2	1-1	2-2	0-1	3-1	1-0	2-1	2-0	2-1	2-2	0-2	0-0	0-0	1-1	1-1	1-0
Torino	2-1	2-0	0-0	1-2	0-1	3-1	4-2	3-3	0-1	1-4	1-1	1-1	1-2	2-1	1-1	2-0	1-3	0-1	0-1	0-0
Udinese	2-1	0-1	1-2	0-0	1-2	2-1	1-0	1-1	0-4	0-4	0-0	2-3	3-1	0-1	1-2	1-0	0-0	1-5	1-5	2-0
Verona	2-1	0-2	1-2	3-1	0-1	0-2	1-2	1-1	3-3	2-1	1-2	2-1	0-2	0-1	1-1	0-3	1-1	2-2	1-1	1-1

Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_A_2015-2016#Tabellone

TABELLA 2. – Legenda

Per facilitare la lettura, ricordiamo il significato delle cinque matrici utilizzate, e dei dati nelle tabelle seguenti. In ciascuna delle matrici in posizione (i, j) è riportato il ‘punteggio’ totalizzato dalla squadra i -esima contro la j -esima, ‘misurato’ secondo le seguenti regole:

Matrice “A”, definita in (1): punteggio assegnato secondo le usuali regole di campionato: 3 punti per una vittoria, 1 per un pareggio, 0 per una sconfitta.

Matrice “B”, discussa nel Paragrafo 4: punteggio assegnato secondo le regole ante 1994/95, in cui alle vittorie venivano assegnati 2 punti invece di 3.

Matrice “C”, definita in (2): punteggio dato dal numero di gol segnati (prolificità).

Matrice “D”, punteggio dato dal numero di gol subiti (invulnerabilità).

Matrice “E”, punteggio dato dal numero di gol segnati meno quelli subiti (differenza reti).

Nella Tabella 3, nelle colonne è riportato il punteggio totale relativo a ciascuna delle matrici A, \dots, E , ottenuto sommando gli elementi su ciascuna riga, e le componenti dei vettori di Perron delle prime quattro matrici.

Nella Tabella 4 sono riportate le classifiche associate a ciascuna colonna della Tabella 3: per le matrici A, B, C, E si passa dalla colonna dei punteggi (o dei vettori di Perron) alla classifica ordinando i punteggi (rispettivamente le componenti del vettore) in maniera decrescente. Per la matrice D riordiniamo la colonna dei punteggi (rispettivamente le componenti del vettore di Perron) in maniera crescente.

Nella Tabella 5 le classifiche sono convertite in permutazioni: su ogni colonna viene riportata la posizione di ogni singola squadra nella relativa classifica. Nell’intestazione, “Totale A” è abbreviato in “TA”, “Perron A” è abbreviato in “PA”, ecc.

TABELLA 3. – Punteggio e vettori di Perron.

Squadra	Totale A	Totale B	Totale C	Totale D	E=C-D	Perron A	Perron B	Perron C	Perron D
1 Atalanta	45	34	41	47	-6	0.0433759	0.0450545	0.0441507	0.0467095
2 Bologna	42	31	33	45	-12	0.0427750	0.0435091	0.0373078	0.0446181
3 Carpi	38	29	37	57	-20	0.0336596	0.0358141	0.0379434	0.0590568
4 Chievo	50	37	43	45	-2	0.0446482	0.0466417	0.0436668	0.0458493
5 Empoli	46	34	40	49	-9	0.0427145	0.0436789	0.0439987	0.0481137
6 Fiorentina	64	46	60	42	18	0.0599417	0.0591672	0.0615447	0.0414514
7 Frosinone	31	23	35	76	-41	0.0280522	0.0296234	0.0357647	0.0773077
8 Genoa	46	33	45	48	-3	0.0443129	0.0436616	0.0448223	0.0513170
9 Inter	67	47	50	38	12	0.0634138	0.0612987	0.0493396	0.0395490
10 Juventus	91	62	75	20	55	0.0899695	0.0834486	0.0756481	0.0221400
11 Lazio	54	39	52	52	0	0.0488133	0.0482423	0.0504870	0.0489281
12 Milan	57	42	49	43	6	0.0537983	0.0543146	0.0494636	0.0464662
13 Napoli	82	57	80	32	48	0.0785907	0.0749962	0.0778704	0.0332309
14 Palermo	39	29	38	65	-27	0.0329353	0.0346207	0.0366819	0.0637841
15 Roma	80	57	83	41	42	0.0797966	0.0772596	0.0815461	0.0444106
16 Sampdoria	40	30	48	61	-13	0.0377846	0.0394892	0.0497673	0.0595676
17 Sassuolo	61	45	49	40	9	0.0614299	0.0610507	0.0520675	0.0417683
18 Torino	45	33	52	55	-3	0.0407606	0.0414844	0.0536363	0.0558361
19 Udinese	39	29	35	60	-25	0.0410499	0.0412660	0.0381763	0.0622461
20 Verona	28	23	34	63	-29	0.0321774	0.0353787	0.0361169	0.0676492

TABELLA 4. – Classifiche.

	Totale A	Perron A	Totale B	Perron B	Totale C	Perron C	Totale D	Perron D	Totale E
1	Juventus	Juventus	Juventus	Juventus	Roma	Roma	Juventus	Juventus	Juventus
2	Napoli	Roma	Roma	Roma	Napoli	Napoli	Napoli	Napoli	Napoli
3	Roma	Napoli	Napoli	Napoli	Juventus	Juventus	Inter	Inter	Roma
4	Inter	Inter	Inter	Inter	Fiorentina	Fiorentina	Sassuolo	Fiorentina	Fiorentina
5	Fiorentina	Sassuolo	Fiorentina	Sassuolo	Lazio	Torino	Roma	Sassuolo	Inter
6	Sassuolo	Fiorentina	Sassuolo	Fiorentina	Torino	Sassuolo	Fiorentina	Roma	Sassuolo
7	Milan	Milan	Milan	Milan	Inter	Lazio	Milan	Bologna	Milan
8	Lazio	Lazio	Lazio	Lazio	Sassuolo	Sampdoria	Chievo	Chievo	Lazio
9	Chievo	Chievo	Chievo	Chievo	Milan	Milan	Bologna	Milan	Chievo
10	Empoli	Genoa	Atalanta	Atalanta	Sampdoria	Inter	Atalanta	Atalanta	Genoa
11	Genoa	Atalanta	Empoli	Empoli	Genoa	Genoa	Genoa	Empoli	Torino
12	Torino	Bologna	Genoa	Genoa	Chievo	Atalanta	Empoli	Lazio	Atalanta
13	Atalanta	Empoli	Torino	Bologna	Atalanta	Empoli	Lazio	Genoa	Empoli
14	Bologna	Udinese	Bologna	Torino	Empoli	Chievo	Torino	Torino	Bologna
15	Sampdoria	Torino	Sampdoria	Udinese	Palermo	Udinese	Carpi	Carpi	Sampdoria
16	Palermo	Sampdoria	Carpi	Sampdoria	Carpi	Carpi	Udinese	Sampdoria	Carpi
17	Udinese	Carpi	Palermo	Carpi	Frosinone	Bologna	Sampdoria	Udinese	Udinese
18	Carpi	Palermo	Udinese	Verona	Udinese	Palermo	Verona	Palermo	Palermo
19	Frosinone	Verona	Frosinone	Palermo	Verona	Verona	Palermo	Verona	Verona
20	Verona	Frosinone	Verona	Frosinone	Bologna	Frosinone	Frosinone	Frosinone	Frosinone

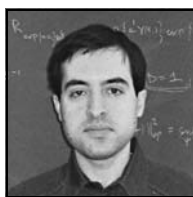
TABELLA 5. – Le classifiche come permutazioni.

Squadra	TA	PA	TB	PB	TC	PC	TD	PD	TE
Atalanta	13	11	10	10	13	12	10	10	12
Bologna	14	12	14	13	20	17	9	7	14
Carpi	18	17	16	17	16	16	15	15	16
Chievo	9	9	9	9	12	14	8	8	9
Empoli	10	13	11	11	14	13	12	11	13
Fiorentina	5	6	5	6	4	4	6	4	4
Frosinone	19	20	19	20	17	20	20	20	20
Genoa	11	10	12	12	11	11	11	13	10
Inter	4	4	4	4	7	10	3	3	5
Juventus	1	1	1	1	3	3	1	1	1
Lazio	8	8	8	8	5	7	13	12	8
Milan	7	7	7	7	9	9	7	9	7
Napoli	2	3	3	3	2	2	2	2	2
Palermo	16	18	17	19	15	18	19	18	18
Roma	3	2	2	2	1	1	5	6	3
Sampdoria	15	16	15	16	10	8	17	16	15
Sassuolo	6	5	6	5	8	6	4	5	6
Torino	12	15	13	14	6	5	14	14	11
Udinese	17	14	18	15	18	15	16	17	17
Verona	20	19	20	18	19	19	18	19	19



Maurizio Brunetti è professore aggregato di Geometria e Algebra presso la Scuola Politecnica e delle Scienze di Base dell'Università di Napoli «Federico II».

Ha conseguito il Ph.D. presso l'Università di Warwick (Regno Unito) e svolge la sua attività di ricerca prevalentemente nell'ambito della topologia algebrica e nell'algebra omologica, con incursioni nella teoria dei grafi, nella teoria dei numeri e nella storia dell'algebra lineare. Ha inoltre curato l'edizione italiana di The Genesis of Science del fisico britannico James Hannam. Tifoso quanto basta per la squadra della sua città natale, si ha comunque più chance di trovarlo in un auditorium di musica classica che sugli spalti di uno stadio.



Francesco D'Andrea è professore associato di Geometria presso la Scuola Politecnica e delle Scienze di Base dell'Università di Napoli «Federico II». Ha conseguito il Ph.D. presso la SISSA di Trieste. I suoi interessi di ricerca riguardano principalmente applicazioni della geometria (differenziale e noncommutativa) alla fisica teorica – in particolare alla meccanica quantistica e alla teoria quantistica dei campi – e aspetti matematici della prima quantizzazione (quantizzazione per deformazione, alla Berezin, metriche su stati di C^ -algebre, gruppi quantistici). È un fervente sostenitore delle applicazioni della matematica al mondo reale, sia esso quello microscopico della fisica delle particelle o quello macroscopico delle competizioni sportive.*