UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI

"FEDERICO II"

Tesi per il Dottorato di Ricerca in Matematica

(VI Ciclo)

Sulle famiglie di curve con singolarità di prefissato tipo

Alessandro De Paris

INTRODUZIONE

È ben noto che ogni curva algebrica può essere proiettata birazionalmente nel piano su una curva con soli nodi, cioè punti doppi a tangenti distinte. Studiare le curve algebriche utilizzando come principale modello una loro proiezione piana con nodi è un metodo di lavoro molto utilizzato dagli autori classici. Considerando tali modelli piani, Brill e Noether diedero impulso ad un filone di ricerca sulle serie lineari di tali curve e sulla loro classificazione, che a tutt'oggi pare ancora non esaurito (cfr. [Arbarello-Cornalba], [Zariski4], [Wahl], [Brun-Hirschowitz]), ottenendo tra l'altro una dimostrazione sintetica del teorema di Riemann-Roch. In effetti, le configurazioni dei nodi danno molte informazioni sia sulla geometria delle curve, sia su spazi parametrizzanti come gli schemi di Hilbert o le varietà dei moduli. Ad esempio, Severi pensò di dedurre l'irriducibilità delle varietà dei moduli dalla irriducibilità degli spazi parametrizzanti curve piane nodali (cfr. [Severi]), detti appunto varietà di Severi (in realtà una dimostrazione soddisfacente dell'irriducibilità delle varietà di Severi è stata ottenuta solo di recente (cfr. [Harris]), mentre quella della irriducibilità delle varietà dei moduli è nota già da tempo).

In letteratura, talvolta, si incontrano dimostrazioni su classificazioni di curve, che passano per la considerazione di modelli piani con singolarità più complicate dei nodi (cfr. [Arbarello-Cornalba]). In effetti la possibilità di deformare curve liscie in curve "molto degeneri" presenta un certo interesse: si pensi ad esempio al tentativo classico di dedurre degli invarianti combinatori per la classificazione delle curve tramite degenerazioni a configurazioni di rette. Inoltre l'esistenza di famiglie di divisori singolari su una superficie S, dà informazioni sulla geometria di S (cfr. [Tannenbaum]). Per ulteriori informazioni su tali problematiche, rimandiamo a [Ciliberto].

Gli spazi parametrizzanti curve aventi un certo numero di nodi sono stati classicamente studiati da vari autori. Recentemente una sistemazione moderna di tale teoria è ottenuta per esempio in [Wahl]. Lo scopo del presente lavoro è costruire più in generale spazi parametrizzanti curve con assegnato tipo di singolarità su superfici liscie. Per definire il "tipo" di singolarità, facciamo riferimento alla classificazione debole (cfr. [Enriques-Chisini, libro IV], [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 3, osservazione 3.9.4]), che sembra essere più utile, almeno nell'ambito di cui sopra, della classificazione per isomorfismo analitico (cfr. [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 5, esercizio 5.14]).

Il primo problema che si incontra è quello di trattare in maniera tecnicamente maneggevole i vari "tipi" di singolarità. La risposta a tale problema è stata in effetti data da Enriques in [Enriques-Chisini, libro IV]: qui si trova uno studio accurato della classificazione debole delle singolarità e vengono introdotti dei diagrammi molto convenienti, che possono essere utilizzati per definire il "tipo". In questo dunque il nostro compito è stato molto agevole: ci siamo limitati a riformalizzare in un linguaggio moderno la definizione dei diagrammi di Enriques, che essenzialmente sono dei grafi. Questo è il contenuto del capitolo V, necessario per trattare con opportuna precisione le dimostrazioni dei capitoli successivi.

I primi quattro capitoli sono dedicati alle definizioni e proprietà dei "punti infinitamente vicini", che sono lo strumento fondamentale nella citata trattazione di [Enriques]. Le varie definizioni che si trovano in letteratura, anche moderna, non consentivano a nostro giudizio una trattazione tecnicamente agevole di alcuni risultati che ci siamo prefissi. La nostra impostazione è stata quella di definire un "punto infinitamente vicino" di S, semplicemente come un morfismo birazionale da uno schema locale regolare di dimensione due ad S (a meno di equivalenza tramite isomorfismi). Questo ci ha permesso di svolgere dai fondamenti la teoria, scendendo nei dettagli delle dimostrazioni, e stabilendo i collegamenti della nostra definizione dei punti infinitamente vicini con quelle correnti. Tutto ciò inoltre, è stato fatto in un ambito generale: quello degli schemi noetheriani integri di dimensione due. Per fare questo, sono stati utilizzati tra l'altro, nella loro piena generalità, alcuni risultati algebrici di Zariski. È anche grazie a tali risultati che ci è stato possibile dare una dimostrazione agevole di alcune proposizioni dovute ad Abhyankar (cfr. [Abhyankar]), che costituiscono il principale strumento per stabilire i suddetti collegamenti tra le varie definizioni.

In definitiva, i primi cinque capitoli forniscono una trattazione generale e molto dettagliata (ma allo stesso tempo sintetica) della teoria dei punti infinitamente vicini, che prepara il terreno in maniera adeguata alle dimostrazioni dei capitoli successivi, più strettamente attinenti allo scopo prefisso. Il fatto che siano state sviluppate dimostrazioni molto dettagliate di fatti a volte elementari lo riteniamo cosa utile, poiché, data la generalità in cui ci siamo mossi, era possibile che l'esperienza e l'intuizione derivanti dal lavorare con varietà su un campo algebricamente chiuso, traesse talvolta in inganno.

Nei capitoli successivi al quinto si utilizza il lavoro preliminare per costruire le varietà dei divisori con singolarità assegnata, su una superficie liscia S. La strategia è qui un po' diversa da quella utilizzata in [Wahl]: si tratta innanzitutto di definire opportuni sottoschemi di S, in modo che imporre ad un divisore di avere un assegnato tipo di singolarità equivalga ad imporre condizioni di "passaggio" per tali sottoschemi. Successivamente si costruisce una famiglia parametrizzante tutti i sottoschemi di S di prefissato tipo. Tale famiglia non è una famiglia universale, ma segnaliamo, sebbene questo non sia trattato nella tesi, che una famiglia universale può essere ottenuta da questa per quoziente dello spazio dei parametri tramite l'azione di un opportuno gruppo finito (corrispondente sostanzialmente al gruppo degli automorfismi del diagramma che definisce il tipo). Le famiglie qui costruite potrebbero tra l'altro essere utili per lo studio della struttura degli schemi di Hilbert di gruppi di punti su S (cfr. [Briançon], [Brun-Hirschowitz]).

Nell'ultimo capitolo si dimostra (cfr. Teorema 8.7), tramite la costruzione delle varietà di incidenza relative a divisori e alle famiglie di sottoschemi di cui sopra, che il luogo dei divisori di una serie lineare completa, con prefissato tipo di singolarità, è un insieme costruibile (nello spazio proiettivo parametrizzante la serie lineare stessa).

In prospettiva, la costruzione di tali luoghi può sperabilmente portare ad una migliore conoscenza riguardo varie questioni di teoria delle curve, ad esempio sulle famiglie di curve di genere prefissato su superfici razionali.

Vorrei ringraziare il prof. Luca Chiantini per la indispensabile assistenza prestatami, e il dott. Vincenzo Di Gennaro per alcuni utilissimi suggerimenti bibliografici.

CAPITOLO 0
Richiami

Per maggiore chiarezza, stabiliamo in questo capitolo alcune definizioni e convenzioni di base; richiameremo altresì alcuni risultati che, essendo ben noti, non dimostreremo. Ci atterremo, con poche eccezioni, alle definizioni di [Hartshorne]; dunque, per qualsiasi termine non esplicitamente definito qui, si intenderà assunta la definizione di [Hartshorne].

Localizzazioni.

Convenzione 0.1. *Per* anello *si intenderà sempre un anello commutativo unitario. Sia A un anello e S una parte moltiplicativa di A. Indicheremo con $S^{-1}A$, l'anello delle frazioni di A rispetto ad S, così come è definito in* [Atiyah-Macdonald, capitolo III]. *Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A, l'anello $A_\mathfrak{p} = (A - \mathfrak{p})^{-1}A$ sarà detto localizzazione di A in $\mathfrak{p}$. L'omomorfismo naturale $A \to S^{-1}A$ ha una proprietà universale (cfr.* [Atiyah-Macdonald, capitolo III, proposizione 3.1]*): ogni omomorfismo $A \to B$ sarà detto* omomorfismo di localizzazione *rispetto a $\mathfrak{p}$, se ha tale proprietà universale (con $S = A - \mathfrak{p}$); talvolta l'omomorfismo sarà sottinteso, in particolare se $A \subseteq B$, esso sarà l'inclusione.*

Diremo che un campo K è campo dei quozienti *di un dominio di integrità A, tramite un omomorfismo, se tale omomorfismo è un omomorfismo di localizzazione rispetto all'ideale nullo.*

Se $\varphi : A \to B$ e $\psi : A' \to B'$ sono omomorfismi di anelli, diremo che φ corrisponde *a ψ tramite gli isomorfismi $a : A \to A'$ e $b : B \to B'$ se $b \circ \varphi = \psi \circ a$.*

Osservazione 0.2. Si verifica subito, utilizzando la proprietà universale, che valgono i seguenti fatti.

(a) Due omomorfismi di localizzazione di A rispetto ad un suo ideale primo $\mathfrak{p}$, differiscono per un'isomorfismo; cioè detti $\varphi : A \to B$ e $\varphi' : A \to B'$ i due omomorfismi, esiste un isomorfismo $b : B \to B'$ tale che $\varphi' = b \circ \varphi$.

(b) Se un omomorfismo $\varphi : A \to B$ corrisponde ad un omomorfismo di localizzazione $A' \to B'$ rispetto ad un ideale primo $\mathfrak{p}$ di A', tramite isomorfismi $a : A \to A'$ e $b : B \to B'$, allora φ è un omomorfismo di localizzazione rispetto ad $a^{-1}(\mathfrak{p})$.

Sottoschemi aperti.

Convenzione 0.3. *Sia S uno schema, U un aperto di S e $i_U : U \to S$ l'inclusione. Ogni fascio $\mathcal{O}_U$ isomorfo a $\mathcal{O}_S|_U = i_U^{-1}(\mathcal{O}_S)$ definisce una struttura di schema su U che rende U un sottoschema aperto di S, e i_U (la funzione sui sostegni di) un morfismo di schemi. Stabiliamo che il fascio $\mathcal{O}_U$ sia dato da $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_S(V)$ per ogni aperto V di U, e dagli omomorfismi di restrizione ρ_{VW} di $\mathcal{O}_S$, dove $W \subseteq V \subseteq U$. La mappa $i_U^\sharp$ è data da $i_U^\sharp(V) = \rho_{V\ V\cap U}$, per ogni aperto V di S.*

Osservazione 0.4. Se $f : S \to T$ è un morfismo di schemi, e se V è un aperto di T e U è un aperto di S tale che $f(U) \subseteq V$, allora la restrizione insiemistica $f|_{U,V}$ è anche (la funzione sui sostegni di) un morfismo di schemi. La mappa $(f|_{U,V})^\sharp$ è definita da $(f|_{U,V})^\sharp(W) = \rho_{f^{-1}(W)\ f^{-1}(W)\cap U} \circ f^\sharp(W)$, per ogni aperto W di V. Inoltre, la restrizione $f|_{U,V}$ è tale che $f \circ i_U = i_V \circ f|_{U,V}$, dove i_U e i_V sono le inclusioni rispettivamente di U e di V, ed è l'unico morfismo a verificare tale condizione (dato che ciò è vero insiemisticamente).

Osservazione 0.5. Se $f : X \to S$ è un morfismo di schemi, e se U è un aperto di S, allora f fattorizza tramite l'inclusione i_U se e solo se l'immagine insiemistica $f(X)$ è contenuta in U, inoltre la fattorizzazione, se esiste, è unica. Il "solo se" è ovvio, il "se" e l'unicità discendono subito da quanto detto nell'osservazione 0.4: infatti $f \circ i_X = i_U \circ f|_{X,U}$, e $i_X = \mathrm{id}_X$.

Equivalenza tra schemi affini ed anelli.

Convenzione 0.6. *Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, il morfismo* Spec $B \to$ Spec A, *così come è definito in* [Hartshorne, capitolo II, proposizione 2.3]*, sarà indicato con* Spec φ.

Osservazione 0.7. La convenzione 0.6 è giustificata dal fatto che le posizioni $A \mapsto \mathrm{Spec}\ A$, $\varphi \mapsto \mathrm{Spec}\ \varphi$, definiscono un funtore controvariante dalla categoria degli anelli commutativi unitari alla categoria degli schemi affini (cfr. [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 1.6.5]).

Ora ricordiamo un fatto fondamentale in teoria degli schemi: il funtore Spec e quello dato dalle sezioni globali ($X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$, $(f : X \to Y) \mapsto (f^\sharp(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X))$ (*)) inducono un'equivalenza tra la categoria degli schemi affini e la categoria opposta di quella degli anelli commutativi unitari. Un riferimento per questo risultato è [Grothendieck-Dieudonné, capitolo 1, 1.6.5]. Noi daremo un cenno di dimostrazione, che mostra come ciò sia sostanzialmente contenuto nelle proposizioni di [Hartshorne, capitolo II], in particolare [ibid., proposizione 2.3] e sua dimostrazione. Per dimostrare dunque che i due funtori inducono un'equivalenza di categorie (cfr. [Mac Lane, capitolo I, paragrafo 4] per la definizione di equivalenza di categorie), dobbiamo dimostrare l'esistenza, per ogni anello A e per ogni schema affine X, di isomorfismi naturali $\tau_A : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(\mathrm{Spec}\ A)$ e $\omega_X : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X(X)$.

Proposizione 0.8. *Per ogni anello commutativo unitario A esiste un isomorfismo $\tau_A : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(\mathrm{Spec}\ A)$, tale che si abbia $(\mathrm{Spec}\ \varphi)^\sharp(\mathrm{Spec}\ A) \circ \tau_A = \tau_B \circ \varphi$ per ogni omomorfismo $\varphi : A \to B$. Per ogni schema affine X esiste un isomorfismo $\omega_X : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X(X)$ tale che per ogni morfismo di schemi affini $f : X \to Y$ si abbia $\mathrm{Spec}\ f^\sharp(Y) \circ \omega_X = \omega_Y \circ f$. Inoltre si ha $\omega_X^\sharp(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X(X)) = \tau^{-1}_{\mathcal{O}_X(X)}$ e $\mathrm{Spec}\ \tau_A = \omega^{-1}_{\mathrm{Spec}\ A}$.*

Cenno di dimostrazione. Per [Hartshorne, capitolo II, proposizione 2.3 e relativa dimostrazione], Spec è un funtore pieno e fedele; inoltre ogni schema affine è isomorfo per definizione ad uno spettro di un anello. Questi fatti dimostrano che è soddisfatta la condizione (c) di [Mac Lane, capitolo IV, paragrafo 4, teorema 1]. Detto $\mathfrak{F}$ l'ovvio funtore dalla categoria degli schemi affini alla sua opposta, il teorema assicura che esiste un funtore quasi

(*) Per motivi di comodità qui usiamo la notazione $\mathcal{O}_X(X)$ invece della più usata $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X)$.

inverso di $\mathfrak{F} \circ \mathrm{Spec}$. La scelta del funtore quasi inverso non è unica, ma è facile vedere che, nella dimostrazione del citato teorema, si può scegliere la composizione del funtore delle sezioni globali con l'inverso di $\mathfrak{F}$, e, come isomorfismo naturale $\tau_A : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A}(\mathrm{Spec}\ A)$, proprio quello stabilito nella dimostrazione di [Hartshorne, capitolo II, proposizione 2.2c]. Risulta allora individuato anche l'isomorfismo naturale $\omega_X : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X(X)$ (nella categoria opposta la freccia risulta invertita). Tale ω_X è determinato dalla condizione di essere l'unico isomorfismo che soddisfa la relazione $\omega_X^\sharp(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X(X)) = \tau^{-1}_{\mathcal{O}_X(X)}$. Tale relazione si chiama relazione triangolare (cfr. [Mac Lane, capitolo IV, paragrafo 1]); vale inoltre anche l'altra relazione triangolare $\mathrm{Spec}\ \tau_A = \omega^{-1}_{\mathrm{Spec}\ A}$. □

Osservazione 0.9. Se si vuole una definizione concreta di ω_X, si può prendere un isomorfismo $f : \mathrm{Spec}\ A \xrightarrow{\sim} X$ e osservare che la prima relazione triangolare e la naturalità di ω_X implicano che $\omega_X = \mathrm{Spec}\ f^\sharp(\mathrm{Spec}\ A) \circ \mathrm{Spec}\ \tau_A^{-1} \circ f^{-1}$, il quale dunque risulta indipendente dalla scelta di f. Una dimostrazione alternativa della proposizione 0.8 si può ottenere definendo direttamente τ_A e ω_X nella maniera già descritta, e verificando, a partire dalle citate proposizioni di [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 2], che la definizione di ω_X è indipendente da f, e che tali isomorfismi sono naturali.

Divisori.

Definizione 0.10. Sia S uno schema noetheriano, integro, separato e regolare. Un *divisore primo* di S è un chiuso irriducibile di codimensione uno; un *divisore* di S è un elemento del gruppo abeliano libero sull'insieme dei divisori primi, quindi può essere scritto come somma formale finita $\sum n_i D_i$, con gli n_i interi e i D_i divisori primi. Un divisore $\sum n_i D_i$ si dice *effettivo* se $n_i \geq 0$ per ogni i.

Convenzione 0.11. *Sia S uno schema integro. Un punto generico di uno spazio topologico è un punto la cui chiusura, che sarà necessariamente irriducibile, coincida con tutto lo spazio. È facile dimostrare che in uno schema ogni chiuso irriducibile ha un unico punto generico. Si ha dunque che S ha un unico punto generico η (cioè $\overline{\{\eta\}} = S$), che è contenuto in ogni aperto non vuoto U. Gli omomorfismi $\rho_{U_\eta} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_\eta$ sono iniettivi, dunque identificheremo $\mathcal{O}_U$ con la sua immagine in $\mathcal{O}_\eta$ e gli omomorfismi ρ_{U_η} con le inclusioni. Lo stesso vale per gli anelli locali $\mathcal{O}_P$.*

Definizione 0.12. Sia S uno schema noetheriano, integro, separato e regolare, η il suo punto generico, $\{Y_i\}$ l'insieme dei divisori primi, e siano η_{Y_i} i punti generici degli Y_i. Gli $\mathcal{O}_{S,\eta_{Y_i}}$, considerati come sottoanelli di $\mathcal{O}_\eta$, sono anelli di valutazione discreta, e sia v_{Y_i} tale valutazione. Definiamo il *divisore* (f) di $f \in \mathcal{O}_\eta - \{0\}$, come $\sum_i v_{Y_i}(f) Y_i$ (che è una somma finita). Un divisore di S si dice *principale* se è del tipo (f), con $f \in \mathcal{O}_\eta - \{0\}$. Due divisori si dicono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è un divisore principale. Se D è un divisore di S, l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D si dice *serie lineare completa di* D, e si indica con $|D|$. Se U è un aperto di S e $D = \sum_i n_i D_i$ è un divisore di S, con $U \cap D$ intenderemo il divisore di U definito dalla somma degli $n_i(D_i \cap U)$ tali che $D_i \cap U \neq \emptyset$. Dato un divisore D di S, se per ogni aperto U di S si definisce $\mathcal{L}(U)$ come l'insieme costituito dallo 0 di $\mathcal{O}_\eta$ e dagli elementi f di $\mathcal{O}_\eta - \{0\}$ tali che $((f)+D) \cap U$

è effettivo, otteniamo un fascio localmente libero $\mathcal{L}$ su S (le mappe di restrizione sono le inclusioni), che si dirà *fascio associato* a D. Diremo che un divisore effettivo D di S *passa* per un sottoschema chiuso X di S, definito da un fascio di ideali $\mathcal{I}$, se per ogni aperto U in cui $D \cap U = (f)$ si ha $f \in \mathcal{I}(U)$: è equivalente a richiedere che l'immersione di X fattorizzi tramite l'immersione del sottoschema (in generale non ridotto) definito da D, dunque un divisore effettivo passa per un punto chiuso se e solo se il supporto del divisore contiene tale punto.

Osservazione 0.13. Sia S uno schema noetheriano, integro, separato e regolare, D un divisore, $\mathcal{L}$ il fascio associato a D, X un sottoschema chiuso, $i : X \to S$ una sua immersione. Consideriamo il morfismo φ ottenuto dalla composizione

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{L}} \otimes i^\sharp} \mathcal{L} \otimes i_* \mathcal{O}_X,$$

dove $\mathcal{O}_S$ e $\mathcal{O}_X$ sono i fasci strutturali. Un elemento $f \in \mathcal{L}(S) - \{0\}$ è tale che $(f) + D$ passi per X se e solo se $\varphi(S)(f) = 0$.

Fibrati in spazi proiettivi.

Definizione 0.14. Sia S uno schema noetheriano, $\mathcal{S}$ un fascio quasi-coerente di $\mathcal{O}_S$-algebre graduate tale che, indicando con $(\text{—})_d$ la componente omogenea di grado d, si abbia $\mathcal{S}_0 \cong \mathcal{O}_S$ (come $\mathcal{O}_S$-algebra), $\mathcal{S}_1$ sia coerente e generi localmente $\mathcal{S}$ come $\mathcal{O}_S$-algebra. Esiste allora uno schema che chiameremo *proiettivizzato di* $\mathcal{S}$ e indicheremo con $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$, un morfismo $\pi : \mathbf{Proj}\ \mathcal{S} \to S$ e un fascio $\mathcal{O}(1)$ su $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ tali che per ogni aperto affine U di S la restrizione di π a $\pi^{-1}(U)$ ed U corrisponda tramite isomorfismi al morfismo indotto $\mathrm{Proj}\ \mathcal{S}(U) \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_S(U) \cong U$, e $\mathcal{O}(1)$, ristretto a $\pi^{-1}(U)$, corrisponda tramite l'isomorfismo $\mathrm{Proj}\ \mathcal{S}(U) \cong \pi^{-1}(U)$ al fascio $\mathcal{O}(1)$ su $\mathrm{Proj}\ \mathcal{S}(U)$. Tale schema è ottenuto per incollamento dei $\mathrm{Proj}\ \mathcal{S}(U)$. Se V è uno spazio vettoriale su un campo k, indicheremo con $\mathbf{P}(V)$ l'insieme delle classi di equivalenza di $V - \{0\}$ modulo la proporzionalità. Se $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero su S, allora definiamo *fibrato in spazi proiettivi associato ad* $\mathcal{E}$ e lo indichiamo con $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, lo schema $\mathbf{Proj}\ \mathrm{Sym}(\check{\mathcal{E}})$, dove $\check{\mathcal{E}}$ è il duale di $\mathcal{E}$ e Sym indica l'algebra simmetrica (che è un fascio di $\mathcal{O}_S$-algebre). Se X è un sottoschema chiuso di S e $\mathcal{I}_X$ è il relativo fascio di ideali, allora $\tilde{S} := \mathbf{Proj}\ (\oplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_X^d)$ si dice *scoppiamento* di S lungo X e il morfismo $\pi : \tilde{S} \to S$ si chiamerà *morfismo di scoppiamento*. Il chiuso $\pi^{-1}(X)$ si dirà *divisore eccezionale*. Se S è una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k e P è un punto chiuso di S, il morfismo di scoppiamento di S lungo P si dirà *trasformazione monoidale*.

Osservazione 0.15. La nostra definizione di fibrato in spazi proiettivi associato differisce da quella di [Hartshorne]. Se k è un campo algebricamente chiuso, e $\mathcal{V}$ è un fascio coerente su $\mathrm{Spec}\ k$ (quindi libero di rango finito) c'è un'applicazione naturale $\mathbf{P}(\mathcal{V}(\mathrm{Spec}\ k)) \to \mathbf{P}(\mathcal{V})$, che è una biezione sui punti chiusi di $\mathbf{P}(\mathcal{V})$, e che consiste nell'associare ad una classe $[f]$ il punto di $\mathbf{Proj}\ \mathrm{Sym}\ \check{\mathcal{V}} \cong \mathrm{Proj}\ \mathrm{Sym}\ (\mathcal{V}(\mathrm{Spec}\ k)\check{})$ l'ideale (omogeneo-massimale) di $\mathrm{Sym}\ (\mathcal{V}(\mathrm{Spec}\ k)\check{})$ generato dai corrispondenti delle sezioni di $\mathcal{V}(\mathrm{Spec}\ k)\check{}$ che si annullano su $[f]$.

CAPITOLO I

Punti infinitamente vicini: considerazioni introduttive

Questo capitolo ha lo scopo di illustrare alcuni concetti di base e di introdurre al lavoro che sarà svolto nei successivi capitoli. Le affermazioni saranno dunque giustificate in maniera meno dettagliata di quanto si farà nei capitoli di contenuto più tecnico. Si farà altresì riferimento ad alcune nozioni di base, come ad esempio quella di molteplicità di un punto per una curva, che comunque ridefiniremo in maniera approfondita nell'ambito della nostra impostazione formale.

La trattazione di Enriques delle singolarità delle curve fa ampio uso della nozione di "punto infinitamente vicino", anzi egli afferma che "il concetto della composizione della singolarità mediante punti multipli infinitamente vicini [$\cdots$] può ritenersi come l'acquisto più importante nella teoria delle singolarità" (cfr. [Enriques-Chisini, libro IV, paragrafo 29, pag. 540]). Anche in tempi più recenti si è continuato a far uso di tale nozione, la quale compare ad esempio in [Zariski] e [Hartshorne]; vediamo dunque di che si tratta.

Considerazioni intuitive.

È certamente molto intuitivo dire che una curva e una sua tangente hanno in comune due punti infinitamente vicini, così come è intuitivo dire che due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito; o ancora, fissato un punto P su una retta, immaginiamo che esista un punto P_1 sulla retta, a distanza infinitesima da P (un tale punto effettivamente esiste, se consideriamo un modello di analisi non standard, e d'altra parte tale linguaggio era molto comune alle origini del calcolo infinitesimale): è naturale pensare che le curve regolari passanti per P e P_1 siano curve passanti per P e ivi tangenti alla retta. Potremmo pensare quindi ad una figura di questo genere:

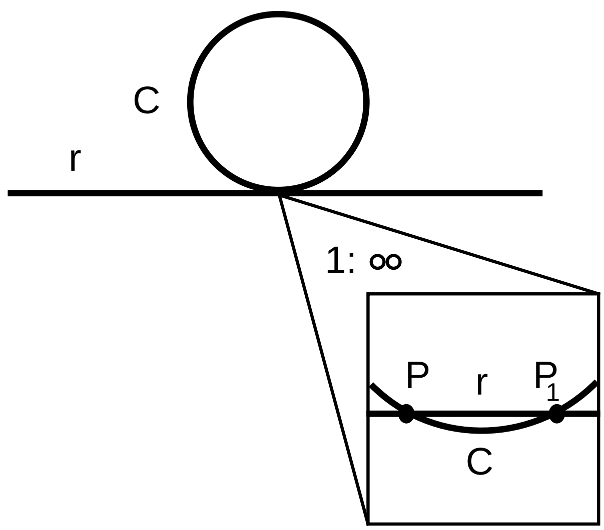

Figura 1.

O forse, per conservare la nozione che un tratto infinitesimo di curva coincide a meno di infinitesimi di ordine superiore con la sua tangente, sarebbe più corretto pensare ad una situazione come quella illustrata in figura 2 (dove le rette del riquadro più a sinistra si possono pensare inclinate di un angolo infinitesimo).

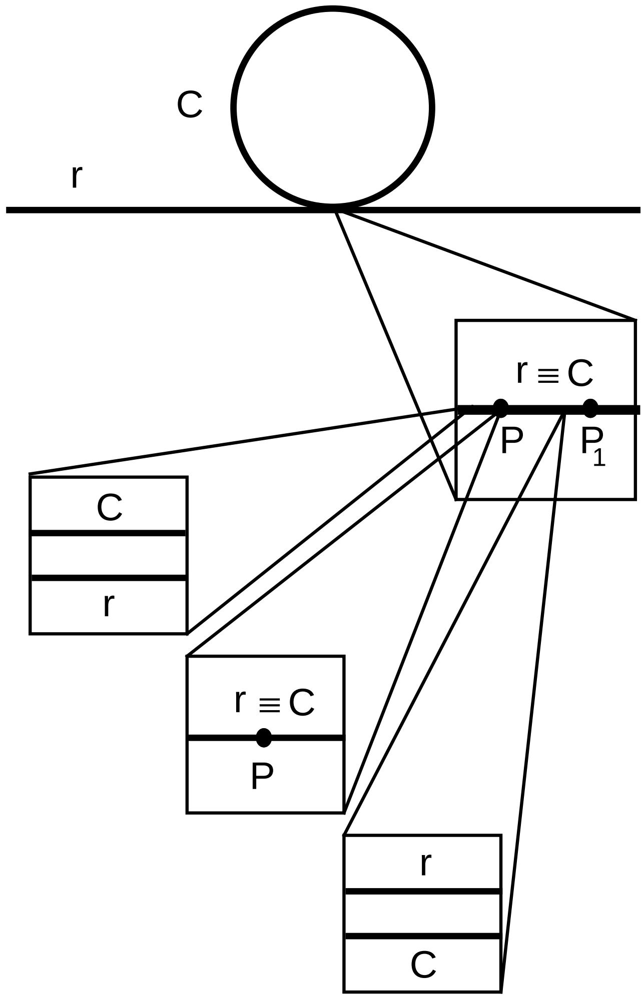

Figura 2.

Sebbene tali figure possano assumere un significato preciso con l'aiuto dell'analisi non standard, generalmente si preferisce illustrare queste situazioni con discorsi di "passaggio al limite" (che d'altra parte perdono anch'essi un significato preciso, quando si lavori su un campo qualsiasi), anche perché, per altri versi, possono trarre in inganno: per esempio, nella terminologia dei punti infinitamente vicini si usa dire che due curve tangenti hanno in comune un punto ordinario e uno infinitamente vicino, mentre nelle figure 1 e 2 non sembra esserci niente che giustifichi la distinzione tra punto ordinario e punto infinitamente vicino. Tale distinzione ha una certa importanza; segnaliamo infatti che, una volta stabilite le opportune definizioni, si avrà che una curva che passi per un punto P_1, infinitamente vicino ad un punto ordinario P, è obbligata a passare per P. In realtà, per comodità di notazione, conviene includere i punti ordinari nell'insieme di quelli che chiameremo punti infinitamente vicini, e la situazione ora segnalata si esprimerà dicendo che il punto infinitamente vicino P_1 "è successivo" a P. Questa relazione di successione si estende anche ai "punti infinitamente vicini in intorni di ordine superiore al primo", che tratteremo più avanti in questo capitolo; e con la considerazione di tali punti sorgono nuovi problemi di rappresentazione intuitiva.

Sebbene dunque si debba fare attenzione a far troppo riferimento all'intuizione, è indubbio che i punti infinitamente vicini, una volta definiti rigorosamente, forniscano delle interpretazioni molto naturali della nozione di molteplicità di intersezione, e consentano di esprimere in maniera semplice importanti fatti, come il teorema di Bézout, il calcolo del genere geometrico di una curva di dato grado e singolarità, l'estensione delle formule di Plücker, e il calcolo del numero di condizioni linearmente indipendenti che derivano dall'imporre alle curve il passaggio per punti con data molteplicità e date condizioni di tangenza dei rami (cfr. ancora [Enriques-Chisini, libro IV, paragrafo 29], e, per alcune considerazioni interessanti [ibid., libro I, capitolo II, specialmente i paragrafi 10 e 18]).

Definizione mediante insiemi di curve.

Incominciamo a vedere come si possa dare una definizione rigorosa del concetto di punto infinitamente vicino. Per ora ci limitiamo a considerare cosa succede nel piano, sebbene parte di ciò che stiamo per dire valga per superfici lisce qualsiasi, e anche in dimensione maggiore di due (cfr. [Enriques-Chisini, libro IV, capitolo IV]).

Così come un punto improprio all'infinito può essere definito come l'insieme delle rette aventi una determinata direzione, possiamo definire un punto infinitamente vicino ad un fissato punto P come l'insieme delle curve algebriche passanti per P e in esso tangenti ad una retta data. Questa via è suggerita, in una forma più generale, in [Enriques-Chisini, libro IV, paragrafo 7, pag. 374].

È interessante notare che, se consideriamo ad esempio l'insieme dei polinomi in due variabili a coefficienti in un campo k che definiscono curve di $\mathbf{A}^2_k$, passanti per l'origine e ivi tangenti all'asse y, questo è esattamente l'ideale $(x, y - x^2)$ nell'anello $k[x, y]$, purché consideriamo come tangenti anche tutte le curve con molteplicità maggiore di uno nell'origine (tali curve, in generale, sono tangenti solo impropriamente alle rette per l'origine; cfr. [Enriques-Chisini, libro I, paragrafo 10, pag. 65]). Tale ideale definisce un sottoschema 0-dimensionale non ridotto di $\mathbf{A}^2_k$, che potrebbe essere usato anch'esso come definizione del punto O_1, infinitamente vicino all'origine O lungo la direzione dell'asse y. Ciò non è esattamente quello che faremo, però questo sottoschema è quello che noi chiameremo "sottoschema associato" a $\{O, O_1\}$.

Definizione mediante trasformazioni quadratiche.

La definizione mediante insiemi di curve non è l'unica che si trova in letteratura. Ancora in [Enriques-Chisini, libro IV, paragrafo 13, pag. 406], si trova una definizione alternativa, che fa uso delle trasformazioni quadratiche. Per illustrare questo approccio riprendiamo l'esempio dei punti all'infinito. Consideriamo due rette parallele nel piano, per esempio r di equazione $x = 0$ ed s di equazione $x = 1$; consideriamo poi la trasformazione ω di equazione

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{y} \\ y' = \dfrac{1}{y} \end{cases},$$

cioè l'applicazione di $\mathbf{A}^2_k$ − (asse x) in sé, data da $(x,y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$. L'inversa di ω è data, con facili conti, da

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{y'} \\ y = \dfrac{1}{y'} \end{cases},$$

dunque è ω stessa. Vediamo in chi si trasformano r ed s. Per sostituzione delle equazioni di ω in quelle di r si ha che $\omega(r - \{(0,0)\})$ ha equazione $\frac{x'}{y'} = 0$, e perciò è ancora $r - \{(0,0)\}$, mentre $\omega(s - \{(1,0)\})$ ha equazione $\frac{x'}{y'} = 1$, e perciò è la retta $x' = y'$ privata anch'essa dell'origine. È naturale allora pensare che l'origine sia l'immagine del punto all'infinito comune ad r ed s, e che l'origine e il punto $(1,0)$ abbiano come immagine punti all'infinito; e ad ulteriore conferma di questa idea, viene il fatto che ω trasforma il fascio delle rette parallele ad r ed s nel fascio delle rette per l'origine, mentre i fasci di centro l'origine e $(1,0)$ sono trasformati in fasci di rette parallele. Conoscendo la definizione dell'ampliamento proiettivo, tale discorso diventa completamente rigoroso. Infatti ω è la restrizione di una proiettività che effettivamente si comporta sui punti impropri nella maniera descritta. Tutto ciò suggerisce una maniera alternativa di definire l'ampliamento proiettivo. Si potrebbero cioè definire i punti impropri come coppie del tipo (ω, P) (o meglio come opportune classi di equivalenza di queste coppie), dove ω è una trasformazione razionale di primo grado e P un punto.

In maniera simile, consideriamo la trasformazione quadratica del piano $\mathbf{P}^2_k$ in sé, di equazione (in coordinate omogenee)

$$\begin{cases} x'_0 = x_1x_2 \\ x'_1 = x_0x_2 \\ x'_2 = x_0x_1 \end{cases}.$$

Tale trasformazione birazionale è un isomorfismo su $\mathbf{P}^2_k$ privato delle tre rette coordinate $x_i = 0$ $(i \in \{0,1,2\})$, e la trasformazione inversa, come si verifica facilmente, è data da

$$(*) \qquad \begin{cases} x_0 = x'_1x'_2 \\ x_1 = x'_0x'_2 \\ x_2 = x'_0x'_1 \end{cases}.$$

Consideriamo una qualsiasi curva che passi semplicemente per $(1,0,0)$ e sia tangente alla retta $x_1 = x_2$. Queste curve sono tutte e sole quelle date da un'equazione del tipo

$$x_0^d x_1 - x_0^d x_2 + g(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

con g polinomio omogeneo di grado $d+1$, non divisibile per x_0^d. Sostituendo le $(*)$ nell'equazione di tale curva, otteniamo l'equazione della sua trasformata che, al di fuori delle tre rette coordinate, sarà del tipo

$${x'_1}^d {x'_2}^{d+1} x'_0 - {x'_1}^{d+1} {x'_2}^d x'_0 + g'(x'_0, x'_1, x'_2) = 0,$$

con g' polinomio omogeneo di grado $2d+2$, divisibile per ${x'_0}^2$. Dividendo per x'_0 otteniamo ancora una equazione della nostra trasformata (perché siamo al di fuori di $x'_0 = 0$), di tipo

$$ {x'_1}^d {x'_2}^{d+1} - {x'_1}^{d+1} {x'_2}^d + g''(x'_0, x'_1, x'_2) = 0, $$

con g'' divisibile per x'_0. Tale equazione è sempre soddisfatta da $(0,1,1)$.

Sorge a questo punto il sospetto che il punto $(0,1,1)$, insieme alla trasformazione quadratica, individui il punto infinitamente vicino all'origine lungo la retta $x_1 = x_2$. Si potrebbe provare, ad ulteriore conferma di questa idea, che ogni curva avente nell'origine un punto di molteplicità $m > 0$ e tale che la retta $x_1 = x_2$ sia una tangente principale, si trasforma in una curva che passa per $(0,1,1)$, privata dei punti delle tre rette coordinate (tra cui naturalmente c'è anche $(0,1,1)$), e viceversa. Segnaliamo inoltre che se partiamo da un'equazione ridotta (cioè tale che ogni fattore irriducibile della scomposizione abbia esponente 1), la massima potenza di x'_0 che divide l'equazione trasformata per sostituzione è ${x'_0}^m$. Tutto ciò vale anche sostituendo $x_1 = x_2$ con una qualsiasi retta per l'origine, purché si faccia attenzione a non prendere un riferimento in cui essa sia retta coordinata; dunque le trasformazioni quadratiche, a meno di cambi di riferimento, forniscono una via di definizione dei punti infinitamente vicini.

Questa è l'impostazione di Noether, che è ampiamente trattata in [Enriques-Chisini, libro IV, capitolo II], a cui rimandiamo per ulteriori ampliamenti e informazioni.

Definizione mediante scoppiamenti.

Passando ad un punto di vista più moderno, cominciamo ad osservare che la trasformazione quadratica, come ogni trasformazione birazionale di superfici, si fattorizza tramite trasformazioni monoidali (cfr. [Hartshorne, capitolo V, Teorema 5.5]). Le trasformazioni monoidali sono scoppiamenti in un punto di una superficie (cfr. definizione 0.14), e non è difficile vedere che la trasformazione quadratica si ottiene mediante scoppiamento dei tre punti coordinati del riferimento $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, e successiva "implosione" (blowing down, inversa del blowing-up) delle rette corrispondenti alle tre rette coordinate (per maggiori dettagli rimandiamo ad [Hartshorne, capitolo V, 4.2.3]). È naturale allora che il discorso fatto per la trasformazione quadratica possa essere ripetuto sulle trasformazioni monoidali che la compongono, ed anzi ci si può limitare allo scoppiamento di $(1,0,0)$. Tale trasformazione è più comoda della trasformazione quadratica, in quanto evita i problemi che si incontrano considerando curve tangenti alle rette coordinate (d'altronde non è un caso che le trasformazioni monoidali siano talvolta chiamate "trasformazioni localmente quadratiche"). Altro grosso vantaggio della trasformazione monoidale è che essa si può fare su una qualsiasi superficie.

In definitiva, analogamente a quanto fatto in precedenza per la trasformazione quadratica, si potrebbe osservare che curve su una qualsiasi superficie, aventi una data tangente principale in un punto P, sono tutte e sole quelle il cui trasformato stretto mediante scoppiamento in P, passano per un certo punto P' del divisore eccezionale. Esempi che illustrano bene la situazione si possono trovare in [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 4, pagg. 28-30]. La definizione che troviamo in [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 3, pag. 392] consiste dunque nel definire un punto infinitamente vicino ad un punto P, come un punto sul divisore eccezionale dello scoppiamento della superficie in P. In realtà la citata definizione, come d'altronde quelle suggerite in [Enriques-Chisini], è più generale, perché comprende la nozione di "punti infinitamente vicini successivi", che ora andiamo brevemente ad esaminare.

Punti infinitamente vicini successivi.

Nel piano affine, le cubiche del fascio di equazione

$$y = x^3 - kx^2$$

sono tutte tangenti all'asse x nell'origine, quindi, intuitivamente, passano per l'origine O e per il suo punto infinitamente vicino O_1 dell'asse x. Esse hanno come ulteriore punto di intersezione il punto $(k, 0)$: è naturale dire allora che per $k = 0$ la terza intersezione diventa infinitamente vicina a O e O_1. Più in generale, possiamo pensare che due curve con un contatto tripunto, cioè che in un dato punto P siano tangenti e con la stessa curvatura, abbiano in comune P, un punto infinitamente vicino P_1 lungo la retta tangente, e un terzo punto P_{11}, infinitamente vicino a P_1 e infinitamente vicino a P "nell'intorno del secondo ordine". La situazione comincia ora a diventare meno intuitiva: è infatti fuorviante pensare a tre punti P, P_1, P_{11} a distanza infinitesima tra di loro: una curva passante per questi tre punti dovrebbe essere tangente lungo tutte e tre le direzioni PP_1, PP_{11}, P_1P_{11}, che in generale sono distinte (una tale interpretazione potrebbe invece essere utile per descrivere un punto doppio). Più corretto sarebbe immaginarsi tre punti infinitamente vicini, allineati al prim'ordine ma non al secondo (vedi figura 3), ma anche così non si sfugge ai problemi a cui abbiamo accennato in precedenza.

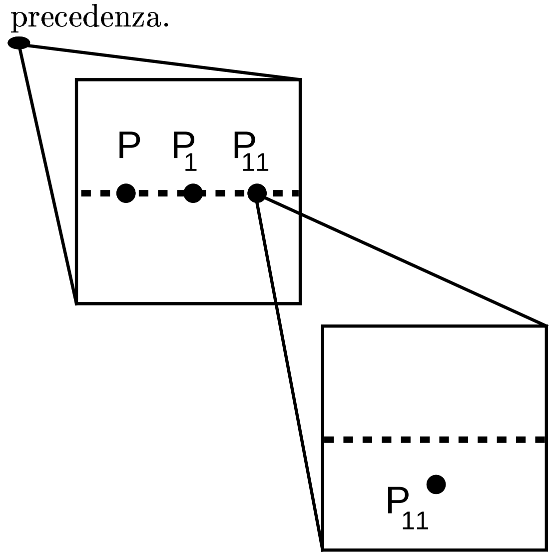

Figura 3.

Le definizioni di cui abbiamo già trattato si estendono agevolmente al caso di più punti infinitamente vicini successivi. Una maniera è quella di definire il punto infinitamente vicino nell'intorno di ordine n di P, lungo una curva C (o, come suggerisce [Enriques-Chisini], lungo un ramo di curva), semplice in P, come l'insieme delle curve che hanno in P un contatto di molteplicità almeno $n + 1$ con C.

L'uso delle trasformazioni quadratiche o monoidali risulta essere molto comodo per descrivere i punti infinitamente vicini negli intorni successivi. Si ha infatti che le curve passanti semplicemente per un punto P di una curva C, anch'essa semplice in P, e aventi con essa un contatto tripunto, si trasformano, tramite un'opportuna trasformazione quadratica o tramite scoppiamento in P, in curve tutte tangenti lungo una determinata direzione al corrispondente del punto infinitamente vicino a P nel primo intorno (per le curve singolari in P la situazione è la stessa, con qualche precisazione). Effettuando una ulteriore trasformazione, abbiamo allora che le nostre curve passano tutte per un punto ordinario; si può dunque definire un punto infinitamente vicino nell'intorno di ordine n come un punto ordinario sull'opportuno divisore eccezionale della superficie ottenuta tramite n trasformazioni successive.

Problemi tecnici.

A questo punto possiamo incominciare a considerare il problema della definizione tecnica dei punti infinitamente vicini. Nell'ottica moderna, una definizione tecnica deve essere data in modo che sia traducibile in termini di logica formale, generalmente nell'ambito della teoria degli insiemi, e naturalmente il trattato [Enriques-Chisini], sia per il periodo in cui si colloca, sia per scelta consapevole (cfr. [Enriques-Chisini, prefazione]), non sempre si attiene a standard di rigore formale facilmente riconducibili a quelli moderni. Tale problema si accentua nel caso dei punti infinitamente vicini, in quanto le relative definizioni sono suggerite più che stabilite.

Poiché in questo lavoro ci sembra opportuno stabilire l'equivalenza delle varie definizioni che si trovano in letteratura, vediamo come ciò può essere fatto.

La maniera di procedere più naturale sarebbe quella di riportare in forma tecnica le varie definizioni e dimostrarne in maniera formale l'equivalenza. Così procedendo però, nel caso di situazioni come quella del trattato [Enriques-Chisini], dovremmo comunque dare esaurienti giustificazioni per la "traduzione" in forma tecnica dell'impostazione originaria. Ma tale problema sussiste anche per i trattati moderni, infatti non sempre la dimostrazione dell'equivalenza di definizioni formali è un fatto formale, ma spesso attiene anch'esso alla "traduzione" dal linguaggio ordinario a quello formale.

Stando così le cose, tanto vale dare un'unica definizione formale, e successivamente dimostrare proposizioni che illustrino in maniera soddisfacente come questa definizione si colleghi alle altre.

Esaminiamo ora più in dettaglio la definizione mediante scoppiamenti che troviamo in [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 3, pag. 392], valida per una qualsiasi superficie liscia e che ora riportiamo interamente (naturalmente tale definizione è data nell'ambito della teoria degli schemi; per cui "superficie liscia" formalmente sta per "schema regolare, separato, integro, di tipo finito su un campo algebricamente chiuso k" e quando si parla di punti si sottintende che siano chiusi).

Definizione 1.1. Sia X una superficie liscia. Allora ogni punto su ogni superficie X', ottenuta da X tramite una successione finita di trasformazioni monoidali, è chiamato *punto infinitamente vicino* di X. Se $g : X'' \to X'$ è un'ulteriore successione di trasformazioni monoidali, e se $Q'' \in X''$ è un punto nell'aperto dove g è un isomorfismo, allora identifichiamo Q'' con $g(Q'')$ come punti infinitamente vicini di X.

Avvertiamo che nel presente lavoro non assumeremo questa definizione ma un'altra, che dimostreremo essere equivalente a questa, nel senso precisato in precedenza.

Cominciamo ad osservare che anche questa definizione non è data in termini strettamente formali, e che la traduzione in tali termini è meno immediata di quanto sembri. Vediamo brevemente quali problemi possono sorgere.

Ci sono due maniere di interpretare la definizione 1.1. Ciò dipende dal fatto che per trasformazione monoidale si può intendere sia un morfismo di scoppiamento in un punto, nel senso delle definizioni di [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7], sia una qualsiasi trasformazione equivalente a questa a meno di isomorfismi. Analizziamo la prima impostazione.

Formalmente, a norma delle definizioni, una trasformazione monoidale è un morfismo $\pi : X' \to X$, dove X' è il proiettivizzato del fascio di $\mathcal{O}_X$-algebre graduate $\mathcal{S} = \oplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$, dove $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali di un punto di X. Poiché il proiettivizzato si ottiene incollando gli schemi $\mathbf{Proj}(\mathcal{S}(U))$ al variare di U tra tutti gli aperti affini di X, un punto di X' sarà una opportuna classe di equivalenza di ideali primi omogenei delle varie algebre $\mathcal{S}(U)$. Non ci soffermiamo ad esaminare cosa sia formalmente un punto su una superficie ottenuta da X tramite non una, ma più trasformazioni monoidali; ci interessa osservare che, in tal modo, un punto infinitamente vicino formalmente risulta essere una classe, rispetto alla relazione di equivalenza generata dall'identificazione stabilita nella definizione 1.1, di questi oggetti piuttosto complicati. Ci si rende subito conto che dimostrazioni strettamente formali con una tale definizione risultano molto poco agevoli. Ma questa impostazione comporta anche un altro problema che ora esaminiamo.

Consideriamo su X due punti distinti P e Q, e sia X_P lo scoppiamento di X in P, X_Q lo scoppiamento di X in Q, $(X_P)_Q$ lo scoppiamento di X_P nel corrispondente di Q e $(X_Q)_P$ lo scoppiamento di X_Q nel corrispondente di P. Le superfici $(X_P)_Q$ e $(X_Q)_P$ sono isomorfe in maniera naturale. Consideriamo un punto P_1 sul divisore eccezionale di P in $(X_Q)_P$ e il suo corrispondente naturale P_1' in $(X_P)_Q$: sebbene P_1 e P_1' debbano definire lo stesso punto infinitamente vicino, non è per niente chiaro se insiemisticamente siano lo stesso oggetto, né se siano equivalenti tramite una successione di identificazioni del tipo stabilito nella definizione 1.1 (e anzi ci sono ottimi motivi per ritenere che ciò sia falso).

È possibile allora che la definizione 1.1 debba essere interpretata formalmente in maniera diversa. È naturale infatti definire "scoppiamento di X in P" non solo il morfismo $\pi : X' \to X$ di cui abbiamo finora parlato, ma qualsiasi morfismo $\pi' : X'' \to X$ tale che esista un isomorfismo $f : X'' \to X'$, tale che $\pi' = \pi \circ f$. Questa interpretazione è confortata dal fatto che lo scoppiamento ha una proprietà universale (cfr. [Hartshorne, capitolo II, proposizione 7.14]), e dunque può essere definito funtorialmente, perciò a meno di isomorfismi. Altro fatto che conforta tale impostazione è che nel già citato teorema sulla fattorizzazione delle trasformazioni birazionali di superficie, le trasformazioni monoidali sono sicuramente intese a meno di isomorfismi.

In quest'ottica, un punto infinitamente vicino risulta essere una classe di equivalenza di coppie del tipo (P, π), dove $\pi : X' \to X$ è composta di trasformazioni monoidali, $P \in X'$ (o, se vogliamo, di coppie del tipo $(P, (\pi_1, \ldots, \pi_n))$, dove le π_i sono le trasformazioni monoidali componenti π), e dove l'equivalenza è definita tenendo conto degli isomorfismi naturali e dell'identificazione stabilita nella definizione 1.1.

La definizione mediante anelli di funzioni razionali.

Sebbene l'impostazione ora esposta sia abbastanza soddisfacente, è opportuno segnalare un'altra definizione formale dei punti infinitamente vicini, che è quella che si trova in [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman].

Notiamo che una qualsiasi composizione di trasformazioni monoidali di superfici, $\pi : S' \to S$, è birazionale, e quindi induce un isomorfismo dei campi delle funzioni razionali $K(S)$ e $K(S')$. Inoltre, un punto $P \in S'$, che nella definizione 1.1 è usato per individuare un punto infinitamente vicino di S, ha anello locale $\mathcal{O}_{S',P}$, che può essere riguardato come sottoanello di $K(S) \cong K(S')$, e tale sottoanello contiene l'anello locale di un unico punto di S, che poi è l'unico punto di S in cui è necessario scoppiare per poter definire P (tutto ciò sarà riformulato in dettaglio nel capitolo III). Ma, grazie ad un risultato di Abhyankar (cfr. [Abhyankar, teorema 3, pag. 343]), sappiamo che ogni sottoanello locale regolare di dimensione due di $K(S)$, contenente l'anello locale di un punto (chiuso) di S, è ottenuto nella maniera appena descritta. Dunque tale sottoanello può essere assunto come definizione formale del punto infinitamente vicino. La relazione tra i punti infinitamente vicini e tali sottoanelli è anche abbastanza intuitiva: per esempio, il sottoanello di $K(\mathbf{P}^2)$ associato al punto infinitamente vicino ad un punto P lungo una retta r viene ad essere l'insieme delle funzioni razionali la cui restrizione a qualsiasi curva semplice in P, e ivi tangente a r risulta definita in P.

Tale impostazione, oltre ad essere molto comoda dal punto di vista formale, ha anche un altro pregio: quello di ricordare molto da vicino la costruzione algebrica della desingolarizzazione di una curva, fatta con i sottoanelli di Dedekind del campo delle funzioni razionali (cfr. [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 6]). In effetti nel libro [Zariski-Samuel] è accennata, per le superfici, una costruzione analoga, tramite proprio sottoanelli di campi di grado di trascendenza due. Naturalmente, poiché la situazione è notevolmente complicata, non si hanno risultati così completi come nel caso delle curve.

La definizione mediante anelli di funzioni razionali presenta però anche uno svantaggio: il risultato di Abhyankar vale per le superfici, ma, per estenderlo in dimensione maggiore di due, o per darne una versione "relativa", cioè valida per le famiglie, non bastano le ipotesi utilizzate in dimensione due (cfr. anche [Zariski- Samuel, appendice 5, pag. 362], per un accenno più generale a difficoltà di questo tipo). Invece la definizione 1.1 è più direttamente estensibile (con qualche cautela nel caso delle curve).

Introduzione ai capitoli successivi.

Nei prossimi due capitoli stabiliremo in maniera dettagliata le necessarie definizioni e proposizioni, che illustrano i collegamenti tra le varie definizioni a cui abbiamo accennato, e che costituiscono parte dell'apparato tecnico che utilizzeremo nella trattazione successiva.

Stabiliremo una definizione "intermedia" tra quelle di [Hartshorne] e [Zariski], che consiste essenzialmente nel considerare i morfismi di schemi indotti dalle inclusioni dei sottoanelli di cui abbiamo parlato, nel campo $K(S)$. Abbiamo ritenuto di procedere in questo modo, poiché così i collegamenti con le definizioni equivalenti sono abbastanza rapidi. Inoltre, con questa impostazione vengono ad essere illustrati in maniera "geometrica" alcuni fatti concernenti la struttura "birazionale" degli schemi, in particolare il fatto che i sottoanelli locali regolari del campo delle funzioni razionali di uno schema noetheriano integro bidimensionale, che contengono qualcuno degli anelli locali, si possano considerare come "germi di desingolarizzazione" dello schema stesso. Naturalmente tale fatto non è necessario per gli sviluppi successivi del lavoro, e certamente non costituisce uno sviluppo nella teoria della desingolarizzazione delle superfici; tuttavia abbiamo ritenuto opportuno, in un lavoro di tesi come il presente, di accennare a tale aspetto nel momento in cui ci si trovava a trattare dei punti infinitamente vicini sulle superfici.

CAPITOLO II

Morfismi canonici relativi a punti e morfismi birazionali

Incominciamo questo capitolo stabilendo altri risultati elementari; tuttavia, siccome nella forma in cui ci servono, non sono fatti largamente utilizzati in letteratura come quelli del capitolo 0, svilupperemo più in dettaglio le dimostrazioni. Successivamente, utilizzando dei risultati di [Zariski-Samuel], dimostreremo dei fatti generali che ci saranno utili in seguito.

Definizione e descrizione dei morfismi canonici relativi a punti.

Per ogni punto P di uno schema S, si può considerare un morfismo, detto *morfismo canonico*, il cui dominio è lo spettro dell'anello locale $\mathcal{O}_{S,P}$ di P in S. La definizione di questo morfismo è basilare in teoria degli schemi: è necessaria per definire le immersioni $k(P) \to S$, e quindi le fibre dei morfismi (cfr. [Hartshorne, capitolo II, pag. 89 ed esercizio 2.7]). Una definizione del morfismo canonico relativo a P si trova in [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 2.5.1]; tuttavia osserviamo qui, perché ci è comodo per il seguito, che tale morfismo può essere definito come il limite inverso delle immersioni degli intorni aperti di P.

Proposizione 2.1. *Sia S uno schema e $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$ il sistema inverso di schemi costituito dagli intorni aperti di P in S e dalle immersioni $i_{U_\alpha U_\beta} : U_\alpha \to U_\beta$. Allora* Spec $\mathcal{O}_{S,P}$ *è limite inverso di tale sistema, cioè esistono morfismi i_{PU_α} :* Spec $\mathcal{O}_{S,P} \to U_\alpha$ *tali che $i_{U_\alpha U_\beta} \circ i_{PU_\alpha} = i_{PU_\beta}$, e se X è uno schema e $i_\alpha : X \to U_\alpha$ sono morfismi tali che $i_{U_\alpha U_\beta} \circ i_\alpha = i_\beta$, allora esiste un unico morfismo $f : X \to$* Spec $\mathcal{O}_{S,P}$ *tale che $i_\alpha = i_{PU_\alpha} \circ f$.*

Dimostrazione. Poiché gli aperti affini formano una base per la topologia, il sottosistema di $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$ costituito dagli intorni affini ha lo stesso limite inverso (se esiste) di $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$. Possiamo allora supporre che il sistema inverso $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$ sia costituito dai soli intorni affini.

In questa ipotesi, $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$ è trasformato tramite il funtore delle sezioni globali nel sistema diretto di anelli $(\mathcal{O}_S(U_\alpha), \rho_{U_\beta U_\alpha})$, il cui limite diretto è per definizione $\mathcal{O}_{S,P}$. Dunque, poiché il funtore delle sezioni globali è controvariante e induce insieme a Spec un'equivalenza di categorie, è immediato verificare che Spec $\mathcal{O}_{S,P}$ è un limite inverso di $\{U_\alpha, i_{\alpha\beta}\}$, se i morfismi i_{PU_α} : Spec $\mathcal{O}_{S,P} \to U_\alpha$ sono definiti da $\omega_{U_\alpha}^{-1} \circ$Spec $\rho_{U_\alpha P}$, dove ω_{U_α} è l'isomorfismo naturale e $\rho_{U_\alpha P}$ è l'omomorfismo $\mathcal{O}_S(U_\alpha) \to \mathcal{O}_{S,P}$, esistente per definizione di limite diretto di anelli. □

Definizione 2.2. Sia P un punto di uno schema S, $\{X, i_{U_\alpha} : X \to U_\alpha\}$ un limite inverso del sistema $\{U_\alpha, i_{U_\alpha U_\beta}\}$ costituito dagli intorni aperti di P in S. Allora i_S (tale notazione ha senso perché S è uno degli U_α) sarà detto un *morfismo canonico* relativo a P.

Convenzione 2.3. *Sia S uno schema e U un suo aperto. Nel seguito useremo spesso la notazione ρ_{UP} per l'omomorfismo $\mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_{S,P}$. Inoltre riserveremo la notazione i_{PS} per il morfismo canonico* Spec $\mathcal{O}_{S,P} \to S$ *facente parte del sistema inverso definito nella dimostrazione della proposizione 2.1.*

Osservazione 2.4. Secondo la definizione di [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 2.5.1], solo i_{PS} si chiama morfismo canonico. Nella nostra impostazione invece si verifica subito, con la proprietà universale del limite, che i morfismi canonici $i : X \to S$ sono tutti e soli quelli del tipo $i_{PS} \circ a$, dove a è un isomorfismo $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P}$.

Conviene perciò descrivere esplicitamente i_{PS}, (cioè, ritornando alla dimostrazione della proposizione 2.1, dobbiamo richiamare come si ottengano i morfismi che definiscono il limite inverso a partire da quelli di un sottosistema). Presi due qualsiasi intorni affini di P, U_α e U_β, e un intorno affine $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, e chiamando $i_{U_\alpha S}$, $i_{U_\beta S}$ le immersioni, si ha $i_{U_\alpha S} \circ i_{PU_\alpha} = i_{U_\alpha S} \circ i_{U_\gamma U_\alpha} \circ i_{PU_\gamma} = i_{U_\gamma S} \circ i_{PU_\gamma}$ e analogamente anche $i_{U_\beta S} \circ i_{PU_\beta} = i_{U_\gamma S} \circ i_{PU_\gamma}$. Quindi $i_{U_\alpha S} \circ i_{PU_\alpha} = i_{U_\alpha S} \circ \omega_{U_\alpha}^{-1} \circ \operatorname{Spec} \rho_{U_\alpha P}$, dove ω_{U_α} è come al solito l'isomorfismo naturale, è indipendente dalla scelta di α, e definisce il morfismo canonico $i_{PS} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P} \to S$.

Dall'osservazione 0.5 e dalla definizione 2.2 segue subito che i morfismi canonici sono caratterizzati dalla seguente proprietà universale.

Proposizione 2.5. *Sia $i : X \to S$ un morfismo canonico relativo ad un punto P di uno schema S. Allora i fattorizza tramite ogni immersione di intorni aperti di P, e se $f : Y \to S$ è un morfismo tale che fattorizzi tramite ogni immersione di intorni aperti di P, o equivalentemente è tale che $f(Y)$ è contenuto in ogni intorno di P (cfr. osservazione 0.5), allora esiste un unico morfismo $f_P : Y \to X$ tale che $f = i \circ f_P$. Inoltre, ogni morfismo che soddisfi tali condizioni è un morfismo canonico relativo a P.*

Lemma 2.6. *Sia U uno schema affine, P un punto di U, A l'anello delle sezioni globali $\mathcal{O}_U(U)$, $\omega_U : U \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} A$ l'isomorfismo naturale, e sia infine $\mathfrak{p} = \omega_U(P)$. Allora l'omomorfismo ρ_{UP} è un omomorfismo di localizzazione di A rispetto a $\mathfrak{p}$.*

Dimostrazione. Consideriamo gli isomorfismi

$$\varphi_A : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \qquad \text{e} \qquad \psi_A : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A\ \mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}},$$

che si trovano definiti nella dimostrazione di [Hartshorne, capitolo II, proposizione 2.2] (identifichiamo A con A_f, dove $f = 1$): dalle definizioni discende direttamente che $\psi_A \circ \rho_{\operatorname{Spec} A\ \mathfrak{p}} \circ \varphi_A$, è il morfismo di localizzazione $l : A \to A_{\mathfrak{p}}$. Posto $g = \omega_U^{-1}$ si ha $g_{\mathfrak{p}}^\sharp \circ \rho_{UP} = \rho_{\operatorname{Spec} A\ \mathfrak{p}} \circ g^\sharp(U)$. L'isomorfismo φ_A è esattamente l'isomorfismo naturale τ_A (cfr. il cenno di dimostrazione della proposizione 0.8). Ora poniamo $\varphi = \varphi_A^{-1} \circ g^\sharp(U)$ e $\psi = \psi_A \circ g_{\mathfrak{p}}^\sharp$. La commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U(U) & \xrightarrow{\rho_{UP}} & \mathcal{O}_{U,P} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ A & \xrightarrow{l} & A_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

dimostra l'asserto. $\square$

Per chiarezza, riportiamo un'altra definizione ben nota (cfr. [Hartshorne, capitolo II, esercizio 3.17c] o [Grothendieck-Dieudonné, capitolo 0, 2.1.1]).

Definizione 2.7. Se P e Q sono punti di uno schema S, allora diremo che P è *specializzazione* di Q e Q è *generizzazione* di P, se $P \in \overline{\{Q\}}$.

Proposizione 2.8. *Un morfismo canonico $i : X \to S$, relativo ad un punto P di uno schema S, è un omeomorfismo sull'immagine, la quale è l'insieme delle generizzazioni di P. Inoltre, se A è un anello, $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A, ed $l : A \to B$ è un omomorfismo di localizzazione di A in $\mathfrak{p}$, allora* Spec l *è un morfismo canonico relativo a $\mathfrak{p}$ in* Spec A.

Dimostrazione. Poiché i morfismi canonici differiscono per isomorfismi dei domini, basta dimostrare l'asserto per i_{PS}. Consideriamo un intorno aperto affine U di P, e osserviamo che i_{PS}, per come è stato definito, fattorizza per l'immersione $i_U : U \to S$, che è un omeomorfismo sull'immagine. Basta dunque provare l'asserto per i_{PU}. Dato che i_{PU} è dato dalla composizione dell'isomorfismo naturale $g = \omega_U^{-1} : \text{Spec } \mathcal{O}_U(U) \xrightarrow{\sim} U$ con Spec ρ_{UP}, basta provare l'asserto per Spec ρ_{UP}, e per il punto $\omega_U(P)$.

Per il lemma 2.6 e sua dimostrazione, esistono un anello A, un ideale primo $\mathfrak{p}$ di A e due isomorfismi $\varphi : \mathcal{O}_S(U) \xrightarrow{\sim} A$ e $\psi : \mathcal{O}_{S,P} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$ tali che sia commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S(U) & \xrightarrow{\rho_{UP}} & \mathcal{O}_{S,P} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ A & \xrightarrow{l} & A_{\mathfrak{p}} \end{array},$$

dove l è l'omomorfismo di localizzazione di A in $\mathfrak{p}$. Applicando il funtore Spec, otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Spec } l} & \text{Spec } A \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Spec } \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \text{Spec } \varphi} \\ \text{Spec } \mathcal{O}_{S,P} & \xrightarrow{\text{Spec } \rho_{UP}} & \text{Spec } \mathcal{O}_S(U) \end{array}.$$

Ma $\varphi = \varphi_A^{-1} \circ g^\sharp(U) = \tau_A^{-1} \circ g^\sharp(U)$, dunque, per la relazione triangolare (cfr. proposizione 0.8), Spec $\varphi = \omega_U \circ g = \mathrm{id}_A(A = \mathcal{O}_S(U))$ e quindi (Spec $\varphi)(\mathfrak{p}) = \omega_U(P)$. Dunque ci riduciamo a provare l'asserto per $\mathfrak{p}$ e Spec l.

L'omomorfismo l, essendo una localizzazione, induce una biezione ($\mathfrak{p} \mapsto l^{-1}(\mathfrak{p})$) tra gli ideali primi di $A_{\mathfrak{p}}$ e gli ideali primi contenuti in $\mathfrak{p}$ (cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo III, proposizione 3.11(iv)]), perciò Spec l è un omeomorfismo sull'immagine, la quale, poiché la relazione $\mathfrak{p} \in \overline{\{\mathfrak{q}\}}$ equivale a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, è proprio l'insieme delle generizzazioni di $\mathfrak{p}$, come volevamo.

Per dimostrare l'ultima affermazione, osserviamo che, dato che gli omomorfismi di localizzazione differiscono per isomorfismi dei domini e i morfismi canonici differiscono per isomorfismi dei domini, basta dimostrare l'asserto per $B = A_{\mathfrak{p}}$. Nel discorso fatto sopra, se $U = \text{Spec } A$, $g = \text{id}_{\text{Spec } A}$, si ha $\text{Spec } \varphi = \omega_{\text{Spec } A}$, e quindi $\text{Spec } l = \omega^{-1}_{\text{Spec } A} \circ \text{Spec } \rho_{\text{Spec } A\ \mathfrak{p}} \circ \text{Spec } \psi = i_{\mathfrak{p}\ \text{Spec } A} \circ \text{Spec } \psi$, e dunque è un morfismo canonico. □

Comportamento dei morfismi canonici rispetto alle specializzazioni.

Proposizione 2.9. *Siano $P, \eta \in S$, con P specializzazione di η. Allora esiste un unico morfismo $i_{\eta P} : X_\eta \to X_P$ tale che $i_\eta = i_P \circ i_{\eta P}$, cioè tale che sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X_\eta \arrow[d, "i_{\eta P}"] \arrow[dr, "i_\eta"] & \\ X_P \arrow[r, "i_P"] & S \end{tikzcd} .$$

Dimostrazione. Poiché $P \in \overline{\{\eta\}}$, ogni intorno di P è anche intorno di η, perciò, preso un morfismo canonico relativo a P, $i_P : X_P \to S$, e uno relativo ad η, $i_\eta : X_\eta \to S$, i_η fattorizza per ogni intorno aperto di P, e dunque per la proprietà universale di i_P (cfr. proposizione 2.5) si ha l'asserto. □

Osservazione 2.10. Notiamo che, sempre perché il sistema degli intorni di P è un sottosistema di quello costituito dagli intorni di η, c'è una mappa naturale tra i limiti diretti $\mathcal{O}_{S,P}$ e $\mathcal{O}_{S,\eta}$ (ottenuta utilizzando la proprietà universale del limite diretto, in maniera analoga a quanto ora fatto per gli schemi), che chiameremo mappa di localizzazione $\rho_{P\eta}$. Anche questa notazione sarà riutilizzata in casi simili. Il nome di mappa di localizzazione è anche qui giustificato dal fatto che $\rho_{P\eta}$ corrisponde ad una mappa di localizzazione fra anelli $A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{q}$, dove A è un anello e $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ sono ideali di A con $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ (a voler essere pignoli, anche questa è un omomorfismo di localizzazione solo a meno dell'isomorfismo naturale tra $A_\mathfrak{q}$ e la localizzazione di $A_\mathfrak{p}$ rispetto al corrispondente di $\mathfrak{q}$).

Proposizione 2.11. *Nella situazione della proposizione 2.9, se $X_P = \text{Spec } \mathcal{O}_{S,P}$, $X_\eta = \text{Spec } \mathcal{O}_{S,\eta}$, $i_P = i_{PS}$, $i_\eta = i_{\eta S}$, si ha $i_{\eta P} = \text{Spec } \rho_{P\eta}$.*

Dimostrazione. Se U è un qualsiasi intorno affine di P (e quindi di η), allora è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S(U) \arrow[r, "\rho_{UP}"] \arrow[dr, "\rho_{U\eta}"] & \mathcal{O}_{S,P} \arrow[d, "\rho_{P\eta}"] \\ & \mathcal{O}_{S,\eta} \end{tikzcd} .$$

Applicando il funtore Spec e componendo con l'isomorfismo naturale $\omega_U^{-1} : \text{Spec } \mathcal{O}_S(U) = \text{Spec } \mathcal{O}_U(U) \xrightarrow{\sim} U$ si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} \text{Spec } \mathcal{O}_{S,\eta} \arrow[d, "\text{Spec } \rho_{P\eta}"] \arrow[dr, "i_{\eta U}"] & \\ \text{Spec } \mathcal{O}_{S,P} \arrow[r, "i_{PU}"] & U \end{tikzcd} .$$

Componendo ancora con l'immersione $i_{US} : U \to S$ otteniamo il diagramma della proposizione 2.9, con Spec $\rho_{P\eta}$ al posto di $i_{\eta P}$ (tenendo conto che stiamo supponendo $X =$ Spec $\mathcal{O}_{S,P}$, ecc.). Per l'unicità, si ha Spec $\rho_{P\eta} = i_{\eta P}$, come volevamo. $\square$

Osservazione 2.12. Analogamente a quanto fatto in precedenza, non è difficile provare che se A è un anello, se $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in$ Spec A, con $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, e se infine consideriamo i morfismi canonici dati dagli spettri degli omomorfismi di localizzazione, allora $i_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} =$ Spec l, dove l è l'omomorfismo di localizzazione $A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{q}}$.

Proposizione 2.13. *Nella situazione della proposizione 2.9, il morfismo $i_{\eta P} : X_\eta \to X_P$ è un morfismo canonico relativo all'unico corrispondente $i_P^{-1}(\eta)$ di η in X_P.*

Dimostrazione. La controimmagine $i_P^{-1}(\eta)$ è costituita da un unico punto perché i_P è un omeomorfismo sull'immagine. Per dimostrare che $i_{\eta P}$ è un morfismo canonico, basta dimostrare la proprietà universale 2.5. Se $f : T \to X_P$ è un morfismo che fattorizza tramite ogni intorno di $i_P^{-1}(\eta)$, $i_P \circ f : T \to S$ fattorizza tramite ogni intorno di η. Dunque esiste un unico $f_\eta : T \to X_\eta$ tale che $i_\eta \circ f_\eta = i_P \circ f$, così da avere il diagramma

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f_\eta"] \arrow[dr, "f"'] & X_\eta \arrow[d, "i_{\eta P}"] \arrow[dr, "i_\eta"] \arrow[l, phantom, "\mathbf{2}"] & \\ & X_P \arrow[r, "i_P"] \arrow[ur, phantom, "\mathbf{1}"] & S \end{tikzcd} ,$$

dove la parte **1** e il perimetro esterno sono commutativi. Se mettiamo $i_{\eta P} \circ f_\eta$ al posto di f, poiché **1** è commutativo, il perimetro esterno resta commutativo. Ma per la proprietà universale di i_P, f è l'unico che composto con i_P dà $i_P \circ f$, perciò $f = i_{\eta P} \circ f_\eta$, cioè anche la parte **2** deve essere commutativa. D'altronde, tra i morfismi $T \to X_\eta$, f_η è l'unico che rende commutativa la parte **2** perché è l'unico che rende comutativo il perimetro esterno. Dunque $i_{\eta P}$ ha la voluta proprietà universale e perciò è un morfismo canonico relativo a $i_P^{-1}(\eta)$.

Comportamento dei morfismi canonici rispetto ai morfismi di schemi.

Proposizione 2.14. *Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi, e sia $P \in S$, $Q = f(P)$. Se $i : X \to S$ è un morfismo canonico relativo a P e $j : Y \to Q$ è un morfismo canonico relativo a Q, esiste un unico morfismo f_{PQ} tale che sia commutativo il diagramma*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_{PQ}"] & S \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "j"] & T \end{tikzcd} .$$

Inoltre, nel caso $X =$ Spec $\mathcal{O}_{S,P}$, $Y =$ Spec $\mathcal{O}_{T,Q}$, $i = i_{PS}$, $j = i_{QT}$, deve aversi $f_{PQ} =$ Spec $f_P^\sharp$.

Dimostrazione. Consideriamo $f \circ i : X \to T$. Poiché i fattorizza tramite ogni intorno aperto di P, $f \circ i$ fattorizza tramite ogni intorno aperto di Q, e dunque, per la proprietà universale di j, esiste un unico morfismo f_{PQ} tale che sia commutativo $(*)$.

Se V è un intorno affine di Q e U è un intorno affine di P contenuto in $f^{-1}(V)$, si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_T(V) & \xrightarrow{\rho_{VQ}} & \mathcal{O}_{T,Q} \\ \downarrow\varphi & & \downarrow f_P^\sharp \\ \mathcal{O}_S(U) & \xrightarrow{\rho_{UP}} & \mathcal{O}_{S,P} \end{array},$$

dove $\varphi = \rho_{f^{-1}(V)U} \circ f^\sharp(V)$. Applicando il funtore Spec e componendo con gli isomorfismi naturali $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_T(V) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_V(V) \cong V$ e $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S(U) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_U(U) \cong U$, si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P} & \xrightarrow{i_{PU}} & U \\ \downarrow\operatorname{Spec} f_P^\sharp & & \downarrow f|_{U,V} \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{T,Q} & \xrightarrow{i_{QV}} & V \end{array}.$$

Componendo ancora con le immersioni aperte di U e di V, otteniamo esattamente il diagramma $(*)$ con $\operatorname{Spec} f_P^\sharp$ al posto di f_{PQ}. Per l'unicità, $\operatorname{Spec} f_P^\sharp = f_{PQ}$, come volevamo.
□

Osservazione 2.15. Conservando le notazioni della precedente dimostrazione, siano ora $f : S \to T$ e $g : T \to V$ due morfismi e sia $P \in S$, $Q = f(P)$, $R = g(Q)$. Si dimostra subito che $(f \circ g)_{PR} = f_{PQ} \circ g_{QR}$. Infatti, dato che f_{PQ} chiude il diagramma $(*)$ e g_{QR} ne chiude uno analogo (cioè $(*)$, con T al posto di S, V al posto di T, ecc.), allora $f_{PQ} \circ g_{QR}$ chiude il diagramma che definisce $(f \circ g)_{PR}$ (cioè, mutatis mutandis, sempre $(*)$).

Si ha poi che se $f : S \to T$ è un isomorfismo e $f(P) = Q$ allora f_{PQ} è un isomorfismo. Infatti $(\mathrm{id}_S)_{PP} = \mathrm{id}_X$ (perché entrambi chiudono il solito diagramma) e analogamente $(\mathrm{id}_T)_{QQ} = \mathrm{id}_Y$. Dunque $f_{PQ} \circ f_{QP} = (\mathrm{id}_S)_{PP} = \mathrm{id}_X$ e $f_{QP} \circ f_{PQ} = (\mathrm{id}_T)_{QQ} = \mathrm{id}_Y$, cioè f_{QP} è l'inversa di f_{PQ}.

Corollario 2.16. *Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi, sia V un aperto di T e $U = f^{-1}(V)$, tale che $f|_{U,V}$ sia un isomorfismo, sia $P \in U$ e $Q = f(P)$, e sia infine $i : X \to S$ un morfismo canonico relativo a P. Allora $f \circ i$ è un morfismo canonico relativo a Q.*

Dimostrazione. Siano i_U e i_V le immersioni e $j : Y \to V$ un morfismo canonico relativo a Q. Poiché $P \in U$ e $Q \in V$, e dato che i morfismi canonici fattorizzano per le inclusioni di intorni aperti, esistono $i' : X_\alpha \to U$ e $j' : Y_\alpha \to V$ tali che $i = i_U \circ i'$ e $j = i_V \circ j'$. Si verifica facilmente, con la proprietà universale, che i' e j' sono morfismi canonici relativi rispettivamente a P e Q. Dunque $f \circ i = f \circ i_U \circ i' = i_V \circ (f|_{U,V}) \circ i' = i_V \circ j' \circ (f|_{U,V})_{PQ} = j \circ (f|_{U,V})_{PQ}$. Poiché j è un morfismo canonico relativo a Q, e poiché $(f|_{U,V})_{PQ}$ è un isomorfismo, in quanto $f|_{U,V}$ è un isomorfismo, l'asserto è provato. □

Morfismi birazionali di schemi.

Vediamo ora come alcuni morfismi canonici siano utili per definire i morfismi birazionali di schemi. Per stabilire tale definizione, si potrebbe pensare di seguire la falsariga della definizione valida per le varietà (cfr. [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 4]), tuttavia in [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 2.3.4] è data una definizione più debole, la quale ad esempio non implica che un morfismo birazionale induca un isomorfismo su un aperto, nè che esso abbia un inverso. Noi ci atterremo a tale definizione, che ora andiamo ad esaminare.

Definizione 2.17. Chiameremo *punti generici massimali* i punti generici dei chiusi irriducibili massimali di uno schema.

Proposizione 2.18. *Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi, e supponiamo che la restrizione di f all'insieme $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ dei punti generici massimali di S, sia una biezione tra tale insieme e l'insieme dei punti generici massimali di T. Allora, posto $\eta_\alpha = f(\xi_\alpha)$, sono equivalenti le seguenti proposizioni.*

(a) *Gli omomorfismi $f^\sharp_{\xi_\alpha} : \mathcal{O}_{T,\eta_\alpha} \to \mathcal{O}_{S,\xi_\alpha}$ sono isomorfismi.*

(b) *Esistono schemi X_α e morfismi $i_\alpha : X_\alpha \to S$, $j_\alpha : X_\alpha \to T$, tali che per ogni α, i_α e j_α siano morfismi canonici relativi rispettivamente a ξ_α ed η_α, e tali che $j_\alpha = f \circ i_\alpha$, cioè sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "i_\alpha"] \arrow[r, "j_\alpha"'] & T \end{tikzcd} \quad .$$

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Fissato α, basta considerare il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi_\alpha} & \xrightarrow{i_{\xi_\alpha S}} & S \\ \downarrow \mathrm{Spec}\ f^\sharp_{\xi_\alpha} & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{T,\eta_\alpha} & \xrightarrow{i_{\eta_\alpha T}} & T \end{array} \quad .$$

Poiché Spec $f^\sharp_{\xi_\alpha}$ è un isomorfismo, $i_{\eta_\alpha T} \circ \mathrm{Spec}\ f^\sharp_{\xi_\alpha}$ è un morfismo canonico relativo ad η_α, e dunque basta porre $X_\alpha = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi_\alpha}$, $i_\alpha = i_{\xi_\alpha S}$ e $j_\alpha = i_{\eta_\alpha T} \circ \mathrm{Spec}\ f^\sharp_{\xi_\alpha}$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Fissato α, poiché i_α e j_α sono morfismi canonici relativi a ξ_α e η_α, esistono isomorfismi $a : X_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi_\alpha}$ e $b : X_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{T,\eta_\alpha}$, che rendono commutative le parti **1** e **2** del diagramma

$$
\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\mathbf{1}"] & \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi_\alpha} \arrow[r, "i_{\xi_\alpha S}"] \arrow[d, "\operatorname{Spec} f^\sharp_{\xi_\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{3}"] & S \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{T,\eta_\alpha} \arrow[r, "i_{\eta_\alpha T}"] & T \\
X_\alpha \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "j_\alpha"] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\mathbf{2}"] &
\end{tikzcd}
.
$$

Poiché anche la parte **3** è commutativa, sarà commutativo il perimetro esterno

$$
\begin{array}{ccc}
X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & S \\
\big\downarrow g & & \big\downarrow f \\
X_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & T
\end{array}
,
$$

dove $g = b^{-1} \circ (\operatorname{Spec} f^\sharp_{\xi_\alpha}) \circ a$. Ma per ipotesi anche

$$
\begin{array}{ccc}
X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & S \\
\big\downarrow \mathrm{id}_{X_\alpha} & & \big\downarrow f \\
X_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & T
\end{array}
$$

è commutativo. Per l'unicità del morfismo che chiude a sinistra questi ultimi due diagrammi (cfr. quanto detto prima sul comportamento dei morfismi canonici rispetto ai morfismi di schemi), si ha $b^{-1} \circ (\operatorname{Spec} f^\sharp_{\xi_\alpha}) \circ a = \mathrm{id}_{X_\alpha}$, dunque $\operatorname{Spec} f^\sharp_{\xi_\alpha} = b \circ a^{-1}$ e quindi $\operatorname{Spec} f^\sharp_{\xi_\alpha}$ è un isomorfismo; e così anche $f^\sharp_{\xi_\alpha}$. $\square$

Definizione 2.19. Un morfismo che soddisfi le condizioni equivalenti (a), (b) della proposizione 2.18 si dice *birazionale*.

Osservazione 2.20. Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi integri. Uno schema integro, essendo irriducibile, ha un unico punto generico massimale. Siano allora η_S ed η_T i punti generici massimali rispettivamente di S e di T. La birazionalità di f equivale allora a richiedere che $f(\eta_S) = \eta_T$ e che $f^\sharp_{\eta_S} : \mathcal{O}_{T,\eta_T} \to \mathcal{O}_{S,\eta_S}$ sia un isomorfismo. Ma $f(\eta_S) = \eta_T$ equivale a dire che f è dominante, cioè $\overline{f(S)} = T$; infatti $f(\eta_S) = \eta_T \Rightarrow T \supseteq \overline{f(S)} \supseteq$

$\overline{\{\eta_T\}} = T \Rightarrow \overline{f(S)} = T$ e viceversa $\overline{f(S)} = T \Rightarrow T \supseteq \overline{\{f(\eta_S)\}} \supseteq f(\overline{\{\eta_S\}}) = f(S) = T \Rightarrow \overline{\{f(\eta_S)\}} = T$, cioè $f(\eta_S)$ è un punto generico di T, e perciò è η_T. Inoltre, per definizione, $K(S) := \mathcal{O}_{S,\eta_S}$ e $K(T) := \mathcal{O}_{T,\eta_T}$ sono i campi delle funzioni razionali rispettivamente di S e di T, e $f^\sharp_{\eta_S}$ è appunto quella che si chiama la mappa indotta da f su tali campi. In definitiva, un morfismo di schemi integri è birazionale se e solo se è dominante e induce un isomorfismo dei campi delle funzioni razionali. In particolare, un morfismo di varietà che sia birazionale nel senso delle varietà, è anche un morfismo birazionale di schemi, tenendo presente [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 4, corollario 4.5(iii)] (naturalmente identifichiamo le varietà quasi proiettive e i morfismi in senso classico, con le varietà quasi proiettive e i morfismi nel senso degli schemi, corrispondenti tramite il funtore descritto in [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 2, proposizione 2.6]; cfr. anche [ibid., paragrafo 4, proposizione 4.10]). Tuttavia una mappa birazionale di varietà, poiché può non essere definita in tutto il dominio, non è in generale un morfismo birazionale.

Per le varietà sappiamo che una mappa razionale è birazionale se e solo se induce un isomorfismo di aperti (cfr. [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 4, corollario 4.5(ii)]). Vediamo qual è la situazione per i morfismi birazionali di schemi.

Proposizione 2.21. *Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi, V un aperto di T, e sia $U = f^{-1}(V)$. Se U e V contengono tutti i punti generici massimali rispettivamente di S e T, e se $f|_{U,V}$ è un isomorfismo, allora f è birazionale.*

Dimostrazione. Siano $\{\xi_\alpha\}$ ed $\{\eta_\beta\}$ i punti generici rispettivamente di S e di T, i quali chiaramente sono anche tutti e soli i punti generici massimali rispettivamente di U e V. Poiché $f|_{U,V}$ è un isomorfismo, induce una biezione tra gli insiemi $\{\xi_\alpha\}$ ed $\{\eta_\beta\}$, dunque lo stesso avviene per f, e possiamo supporre, a meno di cambiare gli indici, che $f(\xi_\alpha) = \eta_\alpha$. Per ogni α, consideriamo un morfismo canonico $i_\alpha : X_\alpha \to S$, relativo a ξ_α. Posto $j_\alpha = f \circ i_\alpha$, per il corollario 2.16, j_α è un morfismo canonico relativo ad η_α. La condizione (b) della proposizione 2.18 è soddisfatta, e dunque f è birazionale. $\square$

Corollario 2.22. *Se $f : S \to T$ è un morfismo di schemi irriducibili, e se V è un aperto non vuoto di T tale che $f|_{f^{-1}(V),V}$ sia un isomorfismo, allora f è birazionale.*

Dimostrazione. Poiché T è irriducibile, il suo punto generico η è l'unico punto generico massimale, che è inoltre contenuto in ogni aperto non vuoto. Dunque V contiene i punti generici massimali di T. Poiché $f|_{f^{-1}(V),V}$ è un isomorfismo, anche $f^{-1}(V)$ è non vuoto, dunque contiene l'unico punto generico massimale ξ dello schema irriducibile S. Essendo soddisfatte le ipotesi della proposizone 2.21 si ha che f è birazionale. $\square$

Osservazione 2.23. Non vale il viceversa della proposizione 2.21. Consideriamo infatti una qualsiasi varietà S, di dimensione positiva, su un campo algebricamente chiuso, e sia P un punto (chiuso) di S. Allora, se $i_P : X \to S$ è un morfismo canonico relativo a P, nessuna restrizione di i_P può essere un isomorfismo di aperti di S (perché X, essendo isomorfo a Spec $\mathcal{O}_{S,P}$, ha un unico punto corrispondente a punti chiusi di S, mentre ogni intorno aperto di S contenente P ha anche altri punti chiusi), e d'altra parte i_P è birazionale, come dimostra la seguente proposizione, che ci sarà utile anche in seguito.

Proposizione 2.24. *Sia S uno schema irriducibile, $P \in S$ e $i_P : X_P \to S$ un morfismo canonico di P. Allora i_P è birazionale.*

Dimostrazione. Dato che S è irriducibile, ha un unico punto generico massimale ξ, e P deve essere specializzazione di ξ. Poiché i_P è un omeomorfismo sull'immagine, che è formata dai punti di cui P è specializzazione, si ha che ξ è immagine di un punto, che deve essere l'unico punto generico massimale di X_P. Dunque i_P induce una biezione sugli insiemi dei punti generici massimali. Abbiamo altresì dimostrato (proposizione 2.9) che sussiste il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X_\xi \arrow[d, "i_{\xi P}"'] \arrow[dr, "i_\xi"] & \\ X_P \arrow[r, "i_P"] & S \end{tikzcd},$$

dove i_ξ e $i_{\xi P}$ sono morfismi canonici relativi a ξ e $i_P^{-1}(\xi)$. Dunque i_P è birazionale. $\square$

La definizione di morfismo birazionale che troviamo in [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 2.3.4] è data dalla parte (a) della proposizione 2.18. In realtà in [Grothendieck-Dieudonné] è richiesto anche che ξ_α sia l'unico punto mandato da f in η_α, ma in una nota immediatamente successiva alla definizione è dimostrato che tale richiesta è ridondante. Dimostriamo dunque la seguente proposizione.

Proposizione 2.25. *Se $f : S \to T$ è un morfismo birazionale di schemi, allora ogni punto generico massimale $\eta \in T$ è immagine di un unico punto $\xi \in S$.*

Dimostrazione. Per definizione, certamente η è immagine di un unico punto generico massimale $\xi \in S$. Supponiamo ora che $f(\zeta) = \eta$ e dimostriamo che $\zeta = \xi$.

Per come abbiamo definito i morfismi birazionali, esiste uno schema X, dominio sia di un morfismo canonico relativo ad η, sia di un morfismo canonico relativo a ξ. A meno di comporre con un isomorfismo, possiamo supporre $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi}$, e avere un diagramma commutativo

$$(\bullet) \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi} \arrow[r, "i_{\xi S}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi}}"] & S \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi} \arrow[r, "j"] & T \end{tikzcd},$$

dove j è un morfismo canonico relativo ad η. Poiché $f(\zeta) = \eta$ abbiamo anche un unico $f_{\zeta\eta}$ che rende commutativo il diagramma

$$(\bullet\bullet) \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\zeta} \arrow[r, "i_{\zeta S}"] \arrow[d, "f_{\zeta\eta}"] & S \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,\xi} \arrow[r, "j"] & T \end{tikzcd}.$$

In generale, se $P \in \overline{\{Q\}}$ e f è continua, $f(P) \in \overline{\{f(Q)\}}$. Poiché dal lemma di Zorn segue che ogni punto è specializzazione di un punto generico massimale (non necessariamente unico), si ha che l'immagine di un punto generico massimale di cui ζ è specializzazione deve essere η, e quindi ζ deve essere specializzazione di ξ, e dunque c'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\zeta} & & \\ {\scriptstyle \mathrm{Spec}\ \rho_{\zeta\xi}}\uparrow & \overset{i_{\zeta S}}{\searrow} & \\ \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi} & \xrightarrow{i_{\xi S}} & S \end{array}.$$

Da tale diagramma e da (••) otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi} & \xrightarrow{i_{\xi S}} & S \\ \downarrow{\scriptstyle f_{\zeta\eta}\circ \mathrm{Spec}\ \rho_{\zeta\xi}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi} & \xrightarrow{j} & T \end{array}.$$

Dal confronto con (•), per l'unicità, otteniamo $\mathrm{id}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi}} = f_{\zeta\eta} \circ \mathrm{Spec}\ \rho_{\zeta\xi}$. Questi sono morfismi di schemi affini: applicando perciò il funtore delle sezioni globali e tenendo conto che $\mathrm{id}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,\xi}}$ è un isomorfismo, ricaviamo che $\rho_{\zeta\xi}$ deve essere suriettivo. Ma $\rho_{\zeta\xi}$ corrisponde ad un morfismo di localizzazione $l : A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{q}}$, con $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ ideali primi di A tali che $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$; ma questo è suriettivo solo se $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Infatti, se fosse $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ ed l suriettivo, si avrebbe che $l(\mathfrak{p})$ sarebbe un ideale (per la suriettività), necessariamente uguale ad $A_{\mathfrak{q}}$, per [Atiyah-Macdonald, proposizione 3.11(ii)]. Ma questo è impossibile perché $\mathfrak{p}$ contiene il nucleo di l (perché gli elementi fuori da $\mathfrak{q}$, quindi in particolare quelli fuori da $\mathfrak{p}$, hanno immagine invertibile, e $A_{\mathfrak{q}}$ non è l'anello nullo), e dunque $l(\mathfrak{p})$ è un ideale proprio di $A_{\mathfrak{q}}$. Dunque $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, e quindi $\zeta = \xi$. □

Corollario 2.26. *Se $f : S \to T$ e $g : T \to V$ sono morfismi di schemi, e g è birazionale, allora $g \circ f$ è birazionale se e solo se f è birazionale.*

Dimostrazione. Sia $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ l'insieme dei punti generici massimali di X, sia $\eta_\alpha = f(\xi_\alpha)$ e $\zeta_\alpha = g(\eta_\alpha)$.

Supponiamo che f sia birazionale. Allora f e g, essendo birazionali, inducono biezioni tra gli insiemi dei punti generici massimali, perciò gli η_α sono i punti generici massimali di T, gli ζ_α sono i punti generici massimali di V, e $g \circ f$ induce una biezione tra $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ e $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Per la birazionalità di f, esistono schemi X_α, morfismi canonici $i_\alpha : X_\alpha \to S$, relativi agli ξ_α, morfismi canonici $j_\alpha : X_\alpha \to T$, relativi agli η_α e tali che $j_\alpha = f \circ i_\alpha$. Per la birazionalità di g esistono schemi Y_α, morfismi canonici $j'_\alpha : Y_\alpha \to T$, relativi agli η_α, morfismi canonici $l_\alpha : X_\alpha \to V$, relativi agli ζ_α e tali che $l_\alpha = f \circ j'_\alpha$. Poiché j_α e j'_α sono morfismi canonici di η_α esistono isomorfismi $a_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ tali che $j_\alpha = j'_\alpha \circ a_\alpha$: a meno di comporre con tali isomorfismi, possiamo supporre $Y_\alpha = X_\alpha$ e $j'_\alpha = j_\alpha$. Dunque si ha che $l_\alpha = g \circ f \circ i_\alpha$, con i_α e l_α morfismi canonici rispettivamente di ξ_α e ζ_α, e perciò $g \circ f$ è birazionale.

Viceversa, supponiamo che $g \circ f$ sia birazionale. Poiché $g \circ f$ induce una biezione tra gli insiemi dei punti generici massimali di S e di V, gli ζ_α sono i punti generici massimali di V. Poiché g induce una biezione tra i punti generici massimali di T e di V, e poiché per la proposizione 2.25, $g^{-1}(\zeta_\alpha) = \eta_\alpha$, gli η_α sono i punti generici massimali di T, ed f induce una biezione tra gli insiemi dei punti generici massimali di S e di T. Per la birazionalità di $g \circ f$, esistono schemi X_α, morfismi canonici $i_\alpha : X_\alpha \to S$, relativi agli ξ_α, morfismi canonici l_α, relativi agli ζ_α e tali che $l_\alpha = g \circ f \circ i_\alpha$. Per la birazionalità di g, ragionando come nella prima parte della dimostrazione, possiamo supporre che esistano morfismi canonici $j_\alpha : X_\alpha \to T$, relativi agli η_α e tali che $l_\alpha = g \circ j_\alpha$. Sappiamo allora che $g \circ j_\alpha = g \circ f \circ i_\alpha$, perché entrambi uguali ad l_α, mentre per dimostrare la birazionalità di f abbiamo bisogno di provare che $j_\alpha = f \circ i_\alpha$. Consideriamo l'unico morfismo $f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$ tale che $j_\alpha \circ f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} = f \circ i_\alpha$: ci basta dimostrare che $f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$. E infatti $l_\alpha \circ f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} = g \circ j_\alpha \circ f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} = g \circ f \circ i_\alpha = l_\alpha = l_\alpha \circ \mathrm{id}_{X_\alpha}$, ma per l'unicità del morfismo $(g \circ f)_{\xi_\alpha \zeta_\alpha}$ tale che $l_\alpha \circ (g \circ f)_{\xi_\alpha \zeta_\alpha} = (g \circ f) \circ i_\alpha$, deve essere $f_{\xi_\alpha \eta_\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$, come volevamo. □

Morfismi birazionali e dimensione.

Proposizione 2.27. *Sia S uno schema e $P \in S$. Allora* $\operatorname{codim}(\overline{\{P\}}, S) = \dim \mathcal{O}_{S,P}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che la codimensione di un chiuso irriducibile Z di uno schema S è l'estremo superiore delle lunghezze n delle catene di chiusi irriducibili $Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$. I punti generici ξ_i di Z_i ($\xi_0 = P$) di tali catene, sono una sequenza di punti, ciascuno specializzazione del precedente. Viceversa data una tale sequenza di punti, con $\xi_0 = P$, le chiusure formano una catena ascendente di chiusi irriducibili che parte da $\overline{\{P\}}$. Se consideriamo il morfismo canonico $i_{PS} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P} \to S$, essendo questo un'omeomorfismo sull'immagine, che è costituita dai punti di cui P è specializzazione, si ha subito che le sequenze di punti, ciascuno generizzazione del precedente, in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P}$ corrispondono tramite i_{PS} ad analoghe sequenze in S, costituite da generizzazioni di P. Dunque $\operatorname{codim}(\overline{\{P\}}, S) = \dim \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P}$, e poiché chiaramente $\dim \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,P} = \dim \mathcal{O}_{S,P}$, si ha l'asserto. □

Osservazione 2.28. Un punto di S è generico massimale se e solo se la sua chiusura ha codimensione zero. Osserviamo poi che la proposizione 2.25 afferma che l'immagine di un punto con chiusura di codimensione maggiore di zero non può avere per immagine un punto con chiusura di codimensione zero.

Osservazione 2.29. Consideriamo un morfismo $f : V \to V'$ di varietà (irriducibili) su un campo algebricamente chiuso k. Se W è una sottovarietà chiusa di V, la chiusura di $W' = f(W)$ in V' è una sottovarietà chiusa di V' e la restrizione $f|_{W,W'}$ è un morfismo dominante, che induce quindi un morfismo $K(W') \to K(W)$, dei campi delle funzioni razionali, dunque $\dim W \geq \dim W'$. Se f è birazionale $\dim V = \dim V'$, e dato che la somma della codimensione e della dimensione di una sottovarietà è uguale alla dimensione della varietà in cui è immersa (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 3, avvertenza 3.2.8]) otteniamo $\operatorname{codim}(W, V) \leq \operatorname{codim}(W', V')$.

Ci si può chiedere se le precedenti osservazioni possano essere generalizzate, affermando che per un arbitrario morfismo birazionale di schemi $f : S \to T$ si abbia

$$\operatorname{codim}(\overline{\{P\}}, S) \leq \operatorname{codim}\ (\overline{\{f(P)\}}, T).$$

Questo è vero per schemi noetheriani integri, come dimostra un risultato che troviamo in [Zariski-Samuel, appendice 1, proposizione 2, pag. 326], e che ora riportiamo, in forma più debole.

Lemma 2.30. *Siano A e B domini di integrità noetheriani, tali che $A \subseteq B \subseteq K$, dove K è campo dei quozienti di A (e quindi di B); sia poi $\mathfrak{p}'$ un ideale primo di B e $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$. Allora* $\operatorname{ht}\, \mathfrak{p}' \leq \operatorname{ht}\, \mathfrak{p}$.

Dimostrazione. Il citato [Zariski-Samuel, appendice 1, proposizione 2, pag. 326], afferma che, se B è finitamente generato su A,

$$\operatorname{ht}\, \mathfrak{p}' + \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{p}' \leq \operatorname{ht}\, \mathfrak{p} + \dim_A B,$$

dove la dimensione di un anello rispetto ad un sottoanello è il grado di trascendenza del campo dei quozienti del primo sul campo dei quozienti del secondo (cfr. [Zariski-Samuel, appendice 1, pag. 326]). Ma K è campo dei quozienti sia di A che di B, dunque $\dim_A B = 0$, il che conclude la dimostrazione nel caso B sia finitamente generato su A: a tale caso ci si riconduce facilmente ragionando come in [Zariski-Samuel, appendice 2, inizio della dimostrazione della proposizione 1, pag. 331]. □

Proposizione 2.31. *Sia $f : S \to T$ un morfismo birazionale di schemi noetheriani integri, e sia P un punto di S. Allora si ha*

$$\dim \mathcal{O}_{S,P} = \operatorname{codim}(\overline{\{P\}}, S) \leq \operatorname{codim}\ (\overline{\{f(P)\}}, T) = \dim \mathcal{O}_{T,f(P)}.$$

Dimostrazione. Le uguaglianze valgono per la proposizione 2.27, basta dunque dimostrare che $\dim \mathcal{O}_{S,P} \leq \dim \mathcal{O}_{T,f(P)}$. Se ξ è il punto generico di S, dato che f è birazionale, $\eta = f(\xi)$ è il punto generico di T. Allora si ha $f^\sharp_\xi \circ \rho_{P\xi} = \rho_{f(P)\eta} \circ f^\sharp_P$, con $f^\sharp_\xi$ isomorfismo, perché f è birazionale, e questo implica che $\operatorname{Im} f^\sharp_\xi \circ \rho_{P\xi} \subseteq \operatorname{Im} \rho_{f(P)\eta}$. Posto $A = \operatorname{Im} f^\sharp_\xi \circ \rho_{P\xi} \subseteq K(T)$ e $B = \operatorname{Im} \rho_{f(P)\eta}$, si ha allora $A \subseteq B \subseteq K(T)$. Inoltre osserviamo che, se consideriamo un'intorno affine di P e ricordiamo che S è integro e noetheriano, per quanto detto all'inizio del capitolo (cfr. osservazione 2.10) $\rho_{P\xi}$ corrisponde alla localizzazione rispetto all'ideale nullo del dominio di integrità noetheriano $\mathcal{O}_{S,P}$, in particolare è iniettiva, e dato che $f^\sharp_\xi$ è un isomorfismo otteniamo $A \cong \mathcal{O}_{S,P}$ e che $K(T)$ è campo dei quozienti di A. Analogamente $B = \mathcal{O}_{T,f(P)}$ (cfr. convenzione 0.11), ed è un dominio di integrità noetheriano. Siamo dunque nella situazione del lemma 2.30, e dobbiamo dimostrare che $\dim B \leq \dim A$. Ma questo è immediato perché, detto $\mathfrak{m}_A$ l'ideale massimale di A (che è locale perché isomorfo a $\mathcal{O}_{S,P}$), ed $\mathfrak{m}_B$ l'ideale massimale di B (anch'esso locale), si ha $\dim B = \operatorname{ht}\, \mathfrak{m}_B \leq \operatorname{ht}\, (\mathfrak{m}_B \cap A) \leq \operatorname{ht}\, \mathfrak{m}_A = \dim A$. □

Corollario 2.32. *Se $f : S \to T$ è un morfismo birazionale di schemi noetheriani integri, allora* $\dim S \leq \dim T$.

Dimostrazione. Si vede subito che la dimensione di uno schema è uguale all'estremo superiore delle codimensioni dei suoi chiusi irriducibili, cioè delle chiusure dei suoi punti. Poiché la codimensione della chiusura di ogni punto di S, per la proposizione 2.31, è minore o uguale alla codimensione della chiusura di un punto di T, l'asserto è dimostrato. □

Osservazione 2.33. Non ci si può aspettare, nella situazione del precedente corollario, che, come per gli schemi di tipo finito su di un campo, la dimensione di S e T sia la stessa: basta infatti considerare come controesempio uno schema noetheriano integro di dimensione positiva, e un morfismo canonico di un punto generico massimale.

Birazionalità e dimensione degli scoppiamenti.

Proposizione 2.34. *Sia S uno schema noetheriano integro, X un sottoschema chiuso proprio di S e $\pi : \tilde{S} \to S$ il morfismo di scoppiamento di S lungo X. Allora $\tilde{S}$ è uno schema noetheriano integro, π è birazionale e $\dim \tilde{S} = \dim S$. Inoltre se S e X sono regolari, anche $\tilde{S}$ e $\pi^{-1}(X)$ sono regolari.*

Dimostrazione. Innanzitutto π è un morfismo proprio, e dunque separato e di tipo finito (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.10a]). È immediato verificare che un morfismo di tipo finito con codominio noetheriano ha dominio noetheriano (è in pratica la versione in teoria degli schemi del teorema della base di Hilbert; cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 3, esercizio 3.13g]), dunque $\tilde{S}$ è noetheriano. Il fatto che l'integrità di S implichi l'integrità di $\tilde{S}$ è ben noto (cfr. [Hartshorne, capitolo II, inizio della dimostrazione della proposizione 7.16]).

Sia U il complementare di X in S. Poiché X è un chiuso proprio, U è un aperto non vuoto, e inoltre, per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.13b]), $\pi|_{\pi^{-1}(U),U}$ è un isomorfismo. Poiché S e $\tilde{S}$ sono integri, quindi irriducibili e U è un aperto non vuoto (e dunque anche $\pi^{-1}(U)$, che è ad esso isomorfo), la birazionalità di π segue dal corollario 2.22.

Per il corollario 2.32, si ha $\dim \tilde{S} \leq \dim S$. Dobbiamo dimostrare che $\dim \tilde{S} \geq \dim S$. Poiché π è proprio, è un'applicazione continua chiusa, dunque $\pi(\tilde{S})$ è un chiuso di S, che inoltre contiene U, per quanto detto prima. Poiché poi S è irriducibile e U è un aperto non vuoto, si ha $\pi(\tilde{S}) = S$, cioè π è suriettivo. Per induzione su n, dimostriamo che se $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$ è una catena di chiusi irriducibili di S, allora esiste una catena $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$ di chiusi irriducibili di $\tilde{S}$, tali che $\pi(X_i) = Z_i$, per ogni $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Supponiamo $n = 0$. Dato che $\tilde{S}$ è noetheriano, $\pi^{-1}(Z_0)$ è unione finita di componenti irriducibili Y_j ($j \in \{1, \ldots, s\}$). Poiché π è chiusa, si ha $Z_0 = \cup_{j=1}^{j=s} \pi(Y_i)$, e i $\pi(Y_i)$ sono chiusi irriducibili, dunque, dato che Z_0 è irriducibile, $Z_0 = Y_{\bar{j}}$ per qualche $\bar{j} \in \{1, \ldots, s\}$. Ponendo $X_0 = Y_{\bar{j}}$, riesce dimostrato l'asserto per $n = 0$. Sia ora $n > 0$. Per l'ipotesi di induzione applicata a $Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$, sappiamo che esiste una catena $X_1 \subset \cdots \subset X_n$ di chiusi irriducibili di $\tilde{S}$, tali che $\pi(X_i) = Z_i$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Poiché $\pi(X_1) = Z_1$, si ha $\pi^{-1}(Z_0) \cap X_1 \neq \emptyset$ e $\pi(\pi^{-1}(Z_0) \cap X_1) = Z_0$. Ragionando come nel caso $n = 0$, si trova una componente irriducibile X_0 di $\pi^{-1}(Z_0) \cap X_1$, tale che $\pi(X_0) = Z_0$. Poiché π è suriettiva e $\pi(X_0) = Z_0 \subset Z_1 = \pi(X_1)$, si deve avere $X_0 \subset X_1$, e dunque $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n$ è la catena voluta. Dunque per ogni catena di chiusi irriducibili di S ce n'è una di $\tilde{S}$ di uguale lunghezza, dunque $\dim \tilde{S} \geq \dim S$.

Sia infine S regolare. Per dimostrare la regolarità di $\tilde{S}$ e di $\pi^{-1}(X)$ si può ripetere la dimostrazione di [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 8, teorema 8.24a], poiché in tale dimostrazione non è necessario supporre che S (in [Hartshorne] è X) e X (in [Hartshorne] è Y) siano varietà su un campo: l'unico punto non immediato è il fatto che $X \times \mathbf{P}^{r-1}$ sia regolare, ma tale prodotto, dato che localmente è del tipo Spec $A[x_1, \ldots, x_{r-1}]$ con A regolare, è regolare per [Matsumura, capitolo 7, paragrafo 17, teorema 40]. $\square$

Considerazioni conclusive.

Abbiamo visto che c'è una corrispondenza tra punti di uno schema e particolari morfismi; e potrebbe essere comodo identificare i punti con l'insieme dei loro morfismi canonici. Per esempio, sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi, che per semplicità supponiamo integri, quindi irriducibili, e quindi ciascuno con un unico punto generico massimale, diciamo rispettivamente η_S ed η_T. Dal punto di vista topologico, $f(\eta_S) = \eta_T$ se e solo se f è dominante. Se consideriamo i morfismi canonici, sappiamo che f è birazionale se e solo se i morfismi canonici relativi ad η_S ed η_T danno luogo a diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "f"] \\ X_\alpha \arrow[ur, "i_{\eta_S}"] \arrow[dr, "i_{\eta_T}"'] & {} \\ & T \end{tikzcd} .$$

Si potrebbe esprimere questo fatto dicendo che un morfismo è birazionale se e solo se "identifica" η_S ed η_T.

Osserviamo anche che, un pò in analogia con la costruzione della categoria degli schemi su un fissato schema base, se fissiamo un opportuno schema X, possiamo definire la categoria degli schemi "con punto generico X". Possiamo cioè considerare coppie (S, i) dove S è uno schema integro e $i : X \to S$ è un morfismo canonico relativo al punto generico di S, e dove un morfismo $f : (S, i) \to (T, j)$ è un morfismo $f : S \to T$ tale che $j = f \circ i$, cioè è birazionale. Lo studio di tali categorie equivale dunque allo studio della geometria birazionale degli schemi che vi appartengono.

Non ci addentriamo in tali considerazioni; quello che ci interessa per il seguito, è che l'annunciata definizione tecnica dei punti infinitamente vicini prenderà spunto dalle osservazioni finora fatte, e anzi nel linguaggio che introdurremo, effettivamente un punto non singolare di uno schema sarà identificato con l'insieme dei relativi morfismi canonici.

CAPITOLO III

Punti infinitamente vicini, in dimensione due

D'ora in poi ci interesserà lavorare su una superficie liscia S, su un campo algebricamente chiuso. Tuttavia, poiché anche in questo capitolo è possibile mantenersi ad un livello piuttosto generale, e anche per i motivi di cui abbiamo parlato alla fine del primo capitolo, per ora stabiliamo solo la seguente convenzione.

Convenzione 3.1.

nel seguito S, S', S'', ecc., saranno sempre schemi noetheriani integri di dimensione due.

Dell'opportunità dell'ipotesi che S abbia dimensione due abbiamo già parlato nel primo capitolo. L'ipotesi di noetherianità sembra abbastanza opportuno introdurla (cfr. anche [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 4, pag. 100, Note on Noetherian Hypotheses]). L'ipotesi di integrità è invece introdotta principalmente per non complicare eccessivamente le notazioni. Riteniamo infatti che buona parte dell'apparato tecnico che svilupperemo si estenda anche a schemi non integri. Volendo sviluppare una teoria dei punti infinitamente vicini su schemi non integri, in maniera analoga a quanto fatto in [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman], è possibile che un'impostazione del tipo di quella che stiamo per sviluppare metta in una luce un po' più chiara la via per effettuare tale estensione. Per quanto riguarda gli schemi (integri) non separati, segnaliamo che l'individuazione di particolari sottoanelli del campo dei quozienti, come vedremo più avanti, non è sufficiente ad individuare i punti infinitamente vicini.

Richiami.

Uno schema locale è uno schema affine il cui anello delle sezioni globali sia locale (cfr. [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 2.5.1]). Lo spettro di un anello locale ha chiaramente un unico punto chiuso, specializzazione di ogni altro; l'unico intorno del punto chiuso è quindi tutto lo schema, e dunque l'anello locale del punto chiuso è isomorfo banalmente all'anello delle sezioni globali; inoltre tutti gli anelli locali dei punti sono localizzazioni di tale anello. Lo stesso chiaramente deve accadere per un qualsiasi schema locale, essendo questo isomorfo allo spettro del suo anello delle sezioni globali.

Uno schema regolare è uno schema i cui anelli locali siano regolari (cfr. [Hartshorne, capitolo II, 6.11.1A]). Poiché localizzazioni di anelli locali regolari rispetto ad ideali primi sono regolari (cfr. [Matsumura, pag. 139]), per la regolarità di uno schema locale basta la regolarità del suo anello delle sezioni globali. Uno schema locale regolare dunque non è altro che uno schema isomorfo allo spettro di un anello locale regolare.

Poiché gli anelli locali regolari sono domini di integrità (cfr. [Atiyah-Macdonald], capitolo 11, pag. 179]), uno schema locale regolare è integro.

Definizione dei punti infinitamente vicini di S.

Definizione 3.2. Diciamo *inclusione di un punto infinitamente vicino di S*, un morfismo birazionale $i : X \to S$ tale che X sia uno schema locale regolare di dimensione due. Diciamo poi *punto infinitamente vicino di S* una classe di equivalenza di inclusioni di punti infinitamente vicini, dove $i : X \to S$ e $i' : X' \to S$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo $f : X' \to X$ tale che $i' = i \circ f$.

Osservazione 3.3. Se si volesse dare una definizione valida anche per schemi non integri non si potrebbe richiedere che i sia birazionale, ma solo, potremmo dire, "birazionale sull'immagine", cioè tale che induca una corrispondenza iniettiva tra gli insiemi dei punti generici massimali, e soddisfacente condizioni analoghe a quelle della proposizione 2.18.

D'ora in poi non ci soffermeremo più su questioni riguardanti l'estensione a schemi non integri.

La tecnica formale della definizione 3.2, suggerita dalle considerazioni del precedente capitolo, ricalca quella di [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 3, pag. 85] per la definizione dei sottoschemi chiusi. Da un punto di vista rigorosamente logico, tale definizione presenta il vizio che un punto infinitamente vicino risulta essere una classe e non un insieme, il che porrebbe delle restrizioni all'uso di tale oggetto formale. Tuttavia (cfr. anche [Grothendieck-Dieudonné, nota a pag. 19] per questioni simili) non ci preoccuperemo di ciò, in quanto tali problemi possono essere risolti con delle modifiche abbastanza standard, che consistono nell'introdurre un opportuno "universo" (cfr. [SGA4, capitolo I], [MacLane]).

Esempio 3.4. Se $P \in S$, un morfismo canonico $i_P : X_P \to S$, relativo a P, è birazionale (per la proposizione 2.24, dato che S, essendo integro, è irriducibile). Se inoltre P è non singolare (cioè $\mathcal{O}_{S,P}$ è regolare) e se $\mathcal{O}_{S,P}$ ha dimensione due, si ha allora che i_P è una inclusione di un punto infinitamente vicino.

È quasi superfluo osservare che se due punti sono distinti, hanno morfismi canonici non equivalenti, altrimenti un (qualsiasi) morfismo canonico dell'uno sarebbe anche morfismo canonico dell'altro, il che è assurdo perché l'unico punto chiuso del dominio di un morfismo canonico ha per immagine il punto a cui il morfismo è relativo. Possiamo quindi introdurre la seguente comoda convenzione.

Convenzione 3.5. *Per abuso di linguaggio identificheremo i punti regolari $P \in S$ che hanno anello locale di dimensione due, con i punti infinitamente vicini determinati dai relativi morfismi canonici.*

Esempio 3.6. Se S è una superficie liscia su un campo k, allora i punti di S che in base alla convenzione 3.5 sono anche punti infinitamente vicini, sono tutti e soli i punti chiusi di S. Infatti, siccome S è una superficie, è anche uno schema noetheriano (perché di tipo finito su un campo), integro e di dimensione due; poiché S è liscia, l'anello $\mathcal{O}_{S,P}$ è regolare per ogni P. Dal fatto che S è di tipo finito su k, e ha dimensione due, discende che P ha un intorno isomorfo allo spettro di una k-algebra di dimensione due. Dunque P è chiuso se e solo se corrisponde ad un ideale massimale. Poiché in una k-algebra di tipo finito un ideale è massimale se e solo se ha altezza uguale alla dimensione dell'anello (cfr.

[Atiyah-Macdonald, capitolo 11]) e poiché la dimensione della localizzazione in un ideale ha dimensione uguale all'altezza dell'ideale stesso, il punto P è chiuso se e solo se Spec $\mathcal{O}_{S,P}$ ha dimensione due. Poiché infine S è liscia, tutti i punti sono non singolari e dunque i punti chiusi sono tutti e soli quelli soddisfacenti la condizione della convenzione 3.5, come avevamo detto.

Osservazione 3.7. Avvertiamo che un punto P con anello locale di dimensione due di un qualsiasi S, è sicuramente chiuso, altrimenti si potrebbe prendere un punto $Q \neq P$ nella chiusura di P (quindi $\overline{\{Q\}} \subset \overline{\{P\}}$), e osservare che codim $\overline{\{Q\}} >$ codim $\overline{\{P\}} = \dim \mathcal{O}_{S,P} = 2 = \dim S$, il che è assurdo. Il viceversa non vale, come si vede considerando Spec $k[x,y]_M$, dove $k[x,y]_M$ è la localizzazione dell'anello dei polinomi in due indeterminate su un campo k rispetto al sistema moltiplicativo M costituito dai polinomi di $\cup_{n \geq 0} y^n + (xy^n)$, dove (xy^n) è l'ideale generato da xy^n e $y^n + (xy^n)$ è la classe laterale di y^n . Infatti tale anello ha dimensione due, mentre l'ideale $(y-x)$ è massimale e ha altezza uno (si pensi ad un piano affine, contenente anche un punto generico e tutti i punti generici delle curve irriducibili, da cui sono stati poi eliminati l'asse x e tutti i punti la cui chiusura non incontra l'asse y).

Definiamo ora l'immagine di un punto infinitamente vicino tramite un morfismo birazionale. Se $f : S \to S'$ è un morfismo birazionale e $i : X \to S$ è un'inclusione di un punto infinitamente vicino P, poiché la composizione di morfismi birazionali è birazionale (corollario 2.26), $f \circ i$ è una inclusione di un punto infinitamente vicino P' di S'. Se i' è equivalente ad i, chiaramente $f \circ i'$ è equivalente a $f \circ i$. Dunque P' dipende solo da P. Possiamo allora stabilire la seguente definizione.

Definizione 3.8. Se P è un punto infinitamente vicino di S, i è una sua inclusione e $f : S \to S'$ è un morfismo birazionale, chiameremo *punto infinitamente vicino immagine* di P tramite f, e lo indicheremo con $f_*(P)$, il punto infinitamente vicino di S' definito dall'inclusione $f \circ i$.

Osservazione 3.9. Se $i : X \to S$ è una inclusione di un punto infinitamente vicino P, e se P_X è il punto chiuso di X, si ha $i_*(P_X) = P$. Infatti, poichè X è locale, l'unico intorno aperto di P_X è tutto X, quindi si ha immediatamente che il morfismo identico id_X di X ha la proprietà universale dei morfismi canonici relativi a P_X. Inoltre essendo X locale regolare di dimensione due, P_X è anche un punto infinitamente vicino di X, e $i_*(P_X)$ è definito dall'inclusione $i \circ \mathrm{id}_X = i$, e dunque è P.

Osservazione 3.10. Se P è un punto ordinario di S, che sia anche un punto infinitamente vicino, allora $f_*(P)$ può non coincidere con l'immagine insiemistica $f(P)$, come accade per esempio se S e S' sono superfici liscie, S è lo scoppiamento di S' in un punto Q, e P è un punto appartenente al divisore eccezionale: in questo caso $f(P) = Q$, mentre $f_*(P)$ è quello che nel primo capitolo chiamavamo il punto infinitamente vicino a Q lungo una certa direzione. Questo fatto non è strano, anzi può aiutare nella comprensione di alcuni fenomeni. Per esempio, vedremo in seguito che se C è una curva di S' passante per $f_*(P)$, in un senso che definiremo, allora C passa anche per $f(P)$, e $f^{-1}(C)$ (che contiene il divisore eccezionale come componente) ha in P almeno molteplicità due: si potrebbe dire, per descrivere ciò, che $f^{-1}(C)$ passa almeno due volte per P perché C passa una volta per $f(P)$ e una volta per $f_*(P)$.

Anelli locali dei punti infinitamente vicini.

Vogliamo ora esaminare la relazione tra i punti infinitamente vicini e i sottoanelli locali regolari del campo delle funzioni razionali. Inoltre, come abbiamo già accennato nel primo capitolo, vogliamo rilevare come un punto infinitamente vicino possa anche essere interpretato come "germe di desingolarizzazione". Per far ciò, nelle prossime proposizioni non supporremo che S sia regolare. Dovremo provare allora anche alcuni risultati validi sia per inclusioni di punti infinitamente vicini, sia per morfismi canonici di punti eventualmente singolari. Osserviamo che questi morfismi, diciamo $i : X \to S$, sono birazionali e tali che X è uno schema locale e integro (noetheriano e di dimensione due), perciò nei lemma tecnici che stabiliremo tra poco utilizzeremo queste ipotesi.

Definizione 3.11. Sia X uno schema locale e integro, sia P il suo punto chiuso e η_X il suo punto generico, e sia $i : X \to S$ un morfismo birazionale. Se $\rho_{P\eta_X} : \mathcal{O}_{X,P} \to \mathcal{O}_{X,\eta_X} = K(X)$ è la mappa di localizzazione, definiamo *anello locale* $\mathcal{O}_{S,i}$ di i in S l'immagine di $\mathcal{O}_X(X)$ in $K(S)$ tramite ${i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ \rho_{X\eta_X}$.

Lemma 3.12. *Siano X e Y schemi locali e integri, siano η_X ed η_S i punti generici di X e di S, e siano $i : X \to S$ e $j : Y \to S$ morfismi birazionali. Allora si ha:*

(a) *c'è un isomorfismo $\rho : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{S,i}$ tale che, detta $\iota_{\mathcal{O}_{S,i}}$ l'inclusione di $\mathcal{O}_{S,i}$ in $K(S)$, si abbia $\iota_{\mathcal{O}_{S,i}} \circ \rho = {i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ \rho_{X\eta_X}$;*

(b) *$K(S)$ è un campo dei quozienti di $\mathcal{O}_{S,i}$;*

(c) *se esiste un morfismo $f : Y \to X$ tale che $j = i \circ f$, allora f è birazionale e $\mathcal{O}_{S,i} \subseteq \mathcal{O}_{S,j}$.*

Dimostrazione. (a) Poiché i è birazionale, $i^\sharp_{\eta_X}$ è un isomorfismo, e dato che X è integro, $\rho_{X\eta_X}$, corrispondendo ad una localizzazione di un dominio di integrità, è iniettivo. Dunque ${i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ \rho_{X\eta_X}$ è iniettivo, e perciò è un isomorfismo di $\mathcal{O}_{X,P}$ sull'immagine $\mathcal{O}_{S,i}$. Basta dunque definire ρ come la restrizione sul codominio a $\mathcal{O}_{S,i}$.

(b) L'inclusione di $\mathcal{O}_{S,i}$ in $K(S)$ corrisponde alla mappa di localizzazione $\rho_{X\eta_X}$ tramite l'inverso dell'isomorfismo ρ, trovato in (a), e tramite $i^\sharp_{\eta_X}$. Poiché già abbiamo osservato che $\rho_{X\eta_X}$ corrisponde ad una localizzazione rispetto all'ideale nullo, la (b) è dimostrata.

(c) Sia η_Y il punto generico di Y. Dato che i e j sono birazionali e $j = i \circ f$, anche f è birazionale. Dunque $f(\eta_Y) = \eta_X$, e si ha $j^\sharp_{\eta_Y} = f^\sharp_{\eta_Y} \circ i^\sharp_{\eta_X}$, e quindi ${i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} = {j^\sharp_{\eta_Y}}^{-1} \circ f^\sharp_{\eta_Y}$; inoltre $\rho_{Y\eta_Y} \circ f^\sharp(X) = f^\sharp_{\eta_Y} \circ \rho_{X\eta_X}$. Dunque ${i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ \rho_{X\eta_X} = {j^\sharp_{\eta_Y}}^{-1} \circ f^\sharp_{\eta_Y} \circ \rho_{X\eta_X} = {j^\sharp_{\eta_Y}}^{-1} \circ \rho_{Y\eta_Y} \circ f^\sharp(X)$, il che significa che l'omomorfismo la cui immagine è $\mathcal{O}_{S,i}$ fattorizza tramite quello la cui immagine è $\mathcal{O}_{S,j}$, e perciò $\mathcal{O}_{S,j} \supseteq \mathcal{O}_{S,i}$. □

Una immediata conseguenza del lemma precedente è che $\mathcal{O}_{S,i}$ non varia al variare della scelta della particolare inclusione i di P. Infatti per un'inclusione equivalente $i' : X' \to S$, l'esistenza dell'isomorfismo $X' \to X$ e del suo inverso implicano, per il punto (c), che $\mathcal{O}_{S,i} \subseteq \mathcal{O}_{S,i'}$ e $\mathcal{O}_{S,i'} \subseteq \mathcal{O}_{S,i}$. Possiamo dunque stabilire la seguente definizione.

Definizione 3.13. Se P è un punto infinitamente vicino di uno schema S, e i è una qualunque sua inclusione, chiameremo *anello locale di P in S* l'anello locale $\mathcal{O}_{S,i}$ di i in S, indicandolo con $\mathcal{O}_{S,P}$ o, se ciò non genera confusione, con $\mathcal{O}_P$.

L'anello $\mathcal{O}_P$, per definizione di punto infinitamente vicino e per il lemma 3.12a, è un sottoanello locale regolare di dimensione due di $K(S)$.

Se $P \in S$ è un punto chiuso non singolare di S, la definizione 3.13 e la convenzione 3.5 sono chiaramente in accordo con l'identificazione di $\mathcal{O}_{S,P}$ con il corrispondente sottoanello di $K(S)$, tramite $\rho_{P\eta_S}$ (cfr. convenzione 0.11).

Vogliamo ora in un certo senso invertire la costruzione di $\mathcal{O}_P$; cioè, a partire da un sottoanello locale regolare di dimensione due di $K(S)$, vogliamo risalire ad un punto infinitamente vicino di S. Se S non è separato, in generale il punto infinitamente vicino non è univocamente determinato. Infatti, se consideriamo la "retta affine con un punto P raddoppiato", così come è definito in [Hartshorne, capitolo II, esempio 2.3.6], non è difficile verificare che i due punti corrispondenti a P hanno lo stesso anello locale. Vale comunque il seguente risultato.

Lemma 3.14. *Sia X uno schema locale integro, $i : X \to S$ un morfismo birazionale e A un sottoanello locale regolare di dimensione due di $K(S)$ che contenga $\mathcal{O}_{S,i}$. Allora esiste un unico punto infinitamente vicino di S che soddisfi le seguenti condizioni (I) e (II).*

(I) *Esiste una inclusione $j : Y \to S$ di Q che fattorizza tramite i, cioè $j = i \circ f$ per un certo $f : Y \to X$.*

(II) $\mathcal{O}_{S,Q} = A$.

Inoltre, detti ι_A l'inclusione di A in $K(S)$, φ l'inclusione di $\mathcal{O}_i$ in A, η_S il punto generico di S, $\omega_X : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ il morfismo naturale, si ha che l'inclusione j e il morfismo f possono essere scelti in modo che $Y = \operatorname{Spec} A$, $f = \omega_X^{-1} \circ a \circ \operatorname{Spec} \varphi$, con a opportuno isomorfismo $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,i} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$, e il diagramma seguente sia commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K(S) \arrow[d, "\operatorname{Spec} \iota_A"'] \arrow[dr, "i_{\eta_S S}"] & \\
\operatorname{Spec} A \arrow[r, "j"] & S
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Dimostrazione. Sia dunque $\varphi : \mathcal{O}_{S,i} \to A$ l'inclusione di $\mathcal{O}_{S,i}$ in A. Per il lemma 3.12a, X è isomorfo a $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,i}$ tramite

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,i} \xrightarrow{\operatorname{Spec} \rho} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\omega_X^{-1}} X \quad .$$

Poniamo $f = \omega_X^{-1} \circ \operatorname{Spec} \rho \circ \operatorname{Spec} \varphi$, e sia $j = i \circ f$.

Osserviamo che $\operatorname{Spec} \varphi$ è birazionale. Infatti, siccome $K(S)$ è un campo dei quozienti di $\mathcal{O}_{S,i}$ (per il lemma 3.12b), e $\mathcal{O}_{S,i} \subseteq A$, $K(S)$ è un campo dei quozienti di A, perciò le inclusioni $\iota_{\mathcal{O}_{S,i}}$ e ι_A corrispondono ad omomorfismi di localizzazione, rispetto ad ideali nulli, e quindi sappiamo che esistono isomorfismi tra K e i campi dei quozienti di $\mathcal{O}_{S,i}$ e di A, che composti con $\iota_{\mathcal{O}_{S,i}}$ e ι_A, danno esattamente le localizzazioni rispetto agli ideali nulli di $\mathcal{O}_{S,i}$ e di A. Poiché sappiamo che gli spettri di tali localizzazioni sono morfismi canonici relativi al punto generico rispettivamente di Spec $\mathcal{O}_{S,i}$ e di Spec A, allora anche Spec $\iota_{\mathcal{O}_{S,i}}$ e Spec ι_A sono morfismi canonici relativi a tali punti generici. Dunque, applicando il funtore Spec al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{S,i} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{O}_{S,i}}"] & A \arrow[d, "\iota_A"] \\
& K(S)
\end{tikzcd},$$

e tenendo conto che, essendo φ un morfismo iniettivo di domini di integrità, Spec φ induce ovviamente una biezione tra i punti generici massimali, riesce dimostrata la birazionalità di Spec φ.

Dunque, dato che ω_X^{-1} e Spec ρ sono isomorfismi, f è birazionale, e poiché i è birazionale per ipotesi, anche j è birazionale. Essendo poi A un anello locale regolare di dimensione due, Spec A è uno schema locale regolare di dimensione due. Dunque j è una inclusione di un punto infinitamente vicino Q.

Detti come al solito η_X il punto generico di X, ed $\omega_X : X \to \text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ la mappa naturale, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \text{Spec } K(S) \arrow[r, "\text{Spec } i^{\sharp}_{\eta_X}{}^{-1}"] \arrow[dl, "\text{Spec } \iota_A"'] \arrow[d, "\text{Spec } \iota_{\mathcal{O}_{S,i}}"] & & \text{Spec } K(X) \arrow[r, "\text{Spec } i^{\sharp}_{\eta_X}"] \arrow[d, "\text{Spec } \rho_{X\eta_X}"] \arrow[dr, "i_{\eta_X X}"] & & \text{Spec } K(S) \arrow[d, "i_{\eta_S S}"] \\
\text{Spec } A \arrow[r, "\text{Spec } \varphi"] & \text{Spec } \mathcal{O}_{S,i} \arrow[rr, "\text{Spec } \rho"] & & \text{Spec } \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\omega_X^{-1}"] & X \arrow[r, "i"] & S
\end{tikzcd}$$

è costituito da quattro parti tutte commutative: la prima parte già abbiamo visto che è commutativa nella prima parte della dimostrazione; la commutatività della seconda parte si ottiene applicando Spec alla relazione del lemma 3.12a; la terza parte è commutativa per definizione di $i_{\eta_X X}$; la quarta parte è commutativa per la proposizione 2.14. Tenendo conto che la composizione dei morfismi della riga superiore è l'identità di $K(S)$, mentre la composizione dei morfismi della riga inferiore è, per definizione, j, otteniamo esattamente il diagramma commutativo richiesto:

$$\begin{tikzcd}
\text{Spec } K(S) \arrow[d, "\text{Spec } \iota_A"] \arrow[dr, "i_{\eta_S S}"] & \\
\text{Spec } A \arrow[r, "j"] & S
\end{tikzcd}.$$

Poiché anche (I) è chiaramente verificata, e le definizioni di j e f rispondono alle richieste fatte alla fine della proposizione (con $a = \text{Spec } \rho$), rimangono da provare (II) e l'unicità di Q.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\text{Spec } K(\text{Spec A}) \arrow[r, "\text{Spec } j^{\sharp}_{(0)}"] \arrow[d, "i_{(0)\ \text{Spec } A}"] & \text{Spec } K(S) \arrow[dl, "\text{Spec } \iota_A"] \arrow[d, "i_{\eta_S S}"] \\
\text{Spec } A \arrow[r, "j"] & S
\end{tikzcd},$$

dove (0) è l'ideale nullo di A, cioè il punto generico di Spec A. Il triangolo in basso a destra abbiamo appena dimostrato che è commutativo; e anche il perimetro esterno è commutativo per la proposizione 2.14. Poiché Spec ι_A è un morfismo canonico di (0), sappiamo che c'è un morfismo h che, messo al posto di Spec $j^\sharp_{(0)}$, rende commutativo il triangolo in alto a sinistra. Poiché il triangolo in basso a destra è commutativo, h rende commutativo il perimetro esterno. Poiché è unico il morfismo che rende commutativo il perimetro esterno, h deve essere Spec $j^\sharp_{(0)}$; dunque Spec $j^\sharp_{(0)}$ rende commutativo il triangolo in alto a sinistra. Se applichiamo il funtore delle sezioni globali a tale triangolo, otteniamo un diagramma che, tramite gli isomorfismi naturali $\tau_A : A \to \mathcal{O}_{\text{Spec }A}(\text{Spec }A)$, $\tau_{K(\text{Spec }A)} : K(\text{Spec }A) \to \mathcal{O}_{\text{Spec }K(\text{Spec }A)}(\text{Spec }K(\text{Spec }A))$ e $\tau_{K(S)} : K(S) \to \mathcal{O}_{\text{Spec }K(S)}(\text{Spec }K(S))$, corrisponde al diagramma commutativo

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} & & A \\ & \swarrow \iota_A & \downarrow g \\ K(S) & \xrightarrow{j^\sharp_{(0)}} & K(\text{Spec }A) \end{array} \quad ,$$

dove g corrisponde a $(i_{(0)\ \text{Spec }A})^\sharp(\text{Spec }A)$ tramite gli isomorfismi naturali, e cioè $g = \tau^{-1}_{K(\text{Spec }A)} \circ (i_{(0)\ \text{Spec }A})^\sharp(\text{Spec }A) \circ \tau_A$. Ma si ha

$$(i_{(0)\ \text{Spec }A})^\sharp(\text{Spec }A) =$$

$$= (\omega^{-1}_{\text{Spec }A} \circ \text{Spec }\rho_{\text{Spec }A\ (0)})^\sharp(\text{Spec }A) =$$

$$= (\text{Spec }\rho_{\text{Spec }A\ (0)})^\sharp(\text{Spec }\mathcal{O}_{\text{Spec }A}(\text{Spec }A)) \circ (\omega^{-1}_{\text{Spec }A})^\sharp(\text{Spec }A) =$$

$$= \tau_{K(\text{Spec }A)} \circ \rho_{\text{Spec }A\ (0)} \circ \tau^{-1}_{\mathcal{O}_{\text{Spec }A}(\text{Spec }A)} \circ \tau_{\mathcal{O}_{\text{Spec }A}(\text{Spec }A)} =$$

$$= \tau_{K(\text{Spec }A)} \circ \rho_{\text{Spec }A\ (0)} \qquad ,$$

e quindi $g = \tau^{-1}_{K(\text{Spec }A)} \circ \tau_{K(\text{Spec }A)} \circ \rho_{\text{Spec }A\ (0)} \circ \tau_A = \rho_{\text{Spec }A\ (0)} \circ \tau_A$. Dunque il diagramma commutativo $(*)$ implica che ${j^\sharp_{(0)}}^{-1} \circ \rho_{\text{Spec }A\ (0)} = \iota_A \circ \tau_A^{-1}$, dunque $\mathcal{O}_{S,Q} = A$.

Per dimostrare l'unicità di Q, supponiamo che ci sia un punto Q' soddisfacente (I) e (II). Allora esiste una inclusione di Q', diciamo $j' : Y' \to X$ e un morfismo $f' : Y' \to X$ tale che $j' = i \circ f'$, e per il lemma 3.12a un isomorfismo $\rho' : \mathcal{O}_{Y'}(Y') \xrightarrow{\sim} A$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec }A & \xrightarrow{\text{Spec }\rho'} & \text{Spec }\mathcal{O}_{Y'}(Y') & \xrightarrow{\omega^{-1}_{Y'}} & Y' \\ \downarrow \text{Spec }\varphi & & \downarrow \text{Spec }f'^\sharp(X) & & \downarrow f' \\ \text{Spec }\mathcal{O}_{S,i} & \xrightarrow{\text{Spec }\rho} & \text{Spec }\mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\omega^{-1}_X} & X \end{array} \quad .$$

Il quadrato a destra è commutativo per la naturalità di ω, mentre il quadrato a sinistra è commutativo perché si ottiene applicando Spec all'uguaglianza $\rho' \circ f'^\sharp(X) = \varphi \circ \rho$, la quale è verificata perché, detto $\eta_{Y'}$ il punto generico di Y', $\iota_A \circ \rho' \circ f'^\sharp(X) = {j'^\sharp_{\eta_{Y'}}}^{-1} \circ \rho_{Y'\eta_{Y'}} \circ f'^\sharp(X) = ((i \circ f'_{\eta_{Y'}})^\sharp)^{-1} \circ f'^\sharp_{\eta_{Y'}} \circ \rho_{X\eta_X} = {i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ {f'^\sharp_{\eta_{Y'}}}^{-1} \circ f'^\sharp_{\eta_{Y'}} \circ \rho_{X\eta_X} = {i^\sharp_{\eta_X}}^{-1} \circ \rho_{X\eta_X} = \iota_{\mathcal{O}_{S,i}} \circ \rho = \iota_A \circ \varphi \circ \rho$, e ι_A, essendo iniettivo, è cancellabile a sinistra. Dunque l'intero diagramma è commutativo. Ma i morfismi della riga superiore sono isomorfismi, e sia a la loro composizione; inoltre il morfismo ottenuto "percorrendo" il lato sinistro e il lato inferiore è f. Abbiamo allora $f' \circ a = f$, e componendo con i, si ha $j' \circ a = j$, cioè j' è equivalente a j. Dunque $Q = Q'$. □

Lemma 3.15. *Se $\pi : S \to S'$ è un morfismo birazionale allora π manda punti chiusi di S con anello locale di dimensione due in punti chiusi di S' con anello locale di dimensione due. In particolare, se P è un punto infinitamente vicino di S, e $i : X \to S$ è una sua inclusione, allora i manda il punto chiuso P_X di X in un punto chiuso P_0 di S, tale che* $\dim \mathcal{O}_{P_0} = 2$. *Inoltre P_0 è indipendente dalla scelta dell'inclusione i.*

Dimostrazione. Sia Q un punto chiuso di S con anello locale di dimensione due e sia $Q' = \pi(Q)$. Per la proposizione 2.31, $\dim \mathcal{O}_{S',Q'} \geq \dim \mathcal{O}_{S,Q} = 2$; e poiché $\dim S' = 2$ vale anche la disuguaglianza opposta, dunque $\dim \mathcal{O}_{S',Q'} = 2$. Abbiamo già osservato in precedenza che se $\dim \mathcal{O}_{S',Q'} = 2$, allora Q' è chiuso, come volevamo.

Il secondo asserto è conseguenza del primo. Infatti i è birazionale, e $\mathcal{O}_{X,P_X} \cong \mathcal{O}_X(X)$ (perché X è locale), e dunque $\dim \mathcal{O}_{X,P_X} = 2$ (perché $\dim \mathcal{O}_X(X) = \dim X$, dato che X è affine, e X ha dimensione due). L'indipendenza di P_0 dalla scelta dell'inclusione segue dal fatto che due inclusioni differiscono per un isomorfismo dei domini, e un isomorfismo di schemi locali manda chiaramente l'unico punto chiuso nell'unico punto chiuso. □

Proposizione 3.16. *Sia P un punto infinitamente vicino di S, $i : X \to S$ una sua inclusione, P_X il punto chiuso di X e sia $P_0 = i(P_X)$. La posizione $P \mapsto (P_0, \mathcal{O}_P)$ definisce una biezione tra l'insieme dei punti infinitamente vicini di S e l'insieme delle coppie del tipo (P, A), con P punto chiuso di S e A sottoanello locale regolare di dimensione due di $K(S)$, che contiene $\mathcal{O}_P$.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.15, P_0 è un punto chiuso di S. La controimmagine tramite i di un qualsiasi intorno aperto di P_0 è un intorno aperto di P_X che, dato che X è locale, deve essere tutto X. Dunque i fattorizza tramite ogni intorno aperto di P_0, e quindi fattorizza per un (qualsiasi) morfismo canonico i_{P_0} relativo a P_0. Si può allora applicare il lemma 3.12, e dunque A è locale regolare di dimensione due (per (a)) e contiene $\mathcal{O}_{P_0}$ (per (c)). Dunque l'applicazione è ben posta.

Dati, viceversa, P_0 ed A, per il lemma 3.14 esiste un unico punto infinitamente vicino di S tale che $\mathcal{O}_P = A$ e tale che una (qualsiasi) sua inclusione $i : X \to S$ fattorizzi per i_{P_0}; e dato che i fattorizza per i_{P_0} e l'immagine del punto chiuso P_X di X è un punto chiuso (per il lemma 3.15) di S, deve essere $P_0 = i(P_X)$. □

Per la proposizione 2.31, se un punto chiuso di S ha anello locale di dimensione minore di due, non "contribuisce" alla corrispondenza, perché il suo anello locale non può essere contenuto in sottoanelli locali regolari di dimensione due di $K(S)$.

Osservazione 3.17. Sia S una superficie singolare, e $f : S' \to S$ un morfismo birazionale di una superficie liscia S' su S, cioè S' è una desingolarizzazione di S. Se P è un punto chiuso di S', $f_*(P)$ è un punto infinitamente vicino di S. È naturale allora l'interpretazione dei punti infinitamente vicini di uno schema singolare come "germi di desingolarizzazione". Si potrebbe pensare di costruire una desingolarizzazione di S "incollando" opportunamente tali germi. In effetti, per le curve una costruzione analoga a questa è ben nota (cfr. [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 6]), ed è dovuta essenzialmente a Chevalley. In dimensione due la situazione è però notevolmente più complicata.

Compatibilità con la definizione mediante anelli di funzioni razionali.

Vediamo ora che nel caso S sia separato, il solo anello locale $\mathcal{O}_P$ individua P. La seguente proposizione stabilisce dunque la compatibilità della nostra definizione di punto infinitamente vicino con quella che si trova in [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman], in quanto le superfici lisce su un campo algebricamente chiuso k sono schemi separati per definizione (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 4, 4.10.1] (*)).

Notiamo anche che gli anelli A dei punti infinitamente vicini, non solo contengono, ma dominano gli anelli locali $\mathcal{O}_P$ dei punti chiusi immagine, altrimenti la localizzazione di $\mathcal{O}_P$ rispetto alla contrazione dell'ideale massimale di A avrebbe dimensione minore di due, in contrasto con la proposizione 2.31. Questo fatto è praticamente implicito nelle definizioni di [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman], dato che in quel contesto si lavora su superfici lisce.

Proposizione 3.18. *Se S è separato, la corrispondenza che ad ogni punto infinitamente vicino di S associa il suo anello locale, è una biezione tra i punti infinitamente vicini di S e i sottoanelli locali regolari di dimensione due del campo $K(S)$, che contengono qualcuno degli anelli locali dei punti chiusi di S. Inoltre, ogni anello locale di un punto infinitamente vicino contiene l'anello locale di un unico punto chiuso di S.*

Dimostrazione. Dire che S è separato significa dire che il morfismo diagonale $\Delta : S \to S \times_{\mathbf{Z}} S$, cioè l'unico morfismo che composto con ciascuna proiezione $\pi_1 : S \times_{\mathbf{Z}} S \to S$, $\pi_2 : S \times_{\mathbf{Z}} S \to S$ dà l'identità di S, è un'immersione chiusa.

Per dimostrare la biettività della corrispondenza $P \mapsto \mathcal{O}_P$, tra i punti infinitamente vicini e i sottoanelli locali regolari di $K(S)$ che contengono qualcuno degli anelli locali dei punti chiusi di S, dobbiamo dimostrare che dato un tale sottoanello A, esiste un unico punto infinitamente vicino P tale che $\mathcal{O}_P = A$. Supponiamo che A contenga gli anelli locali di due punti di S, diciamo P_0 e P_0'. Sia P il punto corrispondente a (P_0, A) (nel senso della proposizione 3.16), P' il punto corrispondente a (P_0', A), e siano i, i' inclusioni rispettive di P e P'. Dato che i fattorizza chiaramente per un morfimo canonico di P_0, e i' fattorizza per un morfimo canonico di P_0', possiamo applicare il lemma 3.14, e supporre

(*) Nella definizione di varietà astratta che troviamo in [Hartshorne], può non risultare chiaro se sia richiesta la separatezza sul campo k o quella assoluta (cioè sugli interi). Ma le due richieste sono equivalenti poiché Spec k, come ogni schema affine, è separato (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 4, proposizione 4.1 e corollario 4.6 (b) ed (e)]).

quindi, a meno di cambiare la scelta di i e i', che sussistano due diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K(S) \arrow[d, "\operatorname{Spec} \iota_A"'] \arrow[dr, "i_{\eta_S S}"] & \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "i"] & S \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K(S) \arrow[d, "\operatorname{Spec} \iota_A"'] \arrow[dr, "i_{\eta_S S}"] & \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, "i'"] & S \end{tikzcd}$$

(con l'ovvio significato delle notazioni), e che, detto P_A il punto chiuso di Spec A, si abbia $P_0 = i(P_A)$ e $P_0' = i'(P_A)$. Se dimostriamo che $i(P_A) = i'(P_A)$, abbiamo finito, perché resterebbe provato sia che $P = P'$ (cfr. proposizione 3.16), sia il fatto che A contiene l'anello locale di un unico punto chiuso (perché $P_0 = P_0'$).

Consideriamo l'unico morfismo $f : \operatorname{Spec} A \to S \times_{\mathbf{Z}} S$ tale che $\pi_1 \circ f = i$, $\pi_2 \circ f = i'$, e l'unico morfismo $g : \operatorname{Spec} K(S) \to S \times_{\mathbf{Z}} S$ tale che $\pi_1 \circ g = i_{\eta_S S}$, $\pi_2 \circ f = i_{\eta_S S}$. Poiché $\pi_1 \circ (f \circ \operatorname{Spec} \iota_A) = (\pi_1 \circ f) \circ \operatorname{Spec} \iota_A = i \circ \operatorname{Spec} \iota_A = i_{\eta_S S}$, e analogamente $\pi_2 \circ (f \circ \operatorname{Spec} \iota_A) = i_{\eta_S S}$, deve essere $g = f \circ \operatorname{Spec} \iota_A$. Ma si ha anche $\pi_1 \circ (\Delta \circ i_{\eta_S S}) = (\pi_1 \circ \Delta) \circ i_{\eta_S S} = \mathrm{id}_S \circ i_{\eta_S S} = i_{\eta_S S}$ e $\pi_2 \circ (\Delta \circ i_{\eta_S S}) = i_{\eta_S S}$, dunque $g = \Delta \circ i_{\eta_S S}$. Perciò $f \circ \operatorname{Spec} \iota_A = \Delta \circ i_{\eta_S S}$. Ora osserviamo che Spec ι_A manda il punto generico η di Spec $K(S)$ nel punto generico η_A di Spec A, dunque $f(\eta_A) = \Delta(i_{\eta_S S}(\eta)) \in \Delta(S)$ (dove $\Delta(S)$ è l'immagine insiemistica di S tramite Δ). Poiché Δ è un'immersione chiusa, $\Delta(S)$ è chiuso, e poiché poi P_A, essendo A locale, sta nella chiusura di η_A, si ha che $f(P_A) \in \Delta(S)$. Componendo con le due proiezioni, si ha $i(P_A) = i'(P_A)$. □

L'ipotesi di separatezza, nella precedente proposizione, è essenziale, in quanto abbiamo già osservato che la retta affine con un punto raddoppiato ha due punti distinti che hanno lo stesso anello locale. Ci si potrebbe chiedere se si possa affermare che nel caso non separato gli anelli locali dei punti infinitamente vicini contengono un unico anello locale di un punto chiuso di S (non necessariamente unico), ma non ci soffermiamo su ciò.

Dimostriamo ora un corollario della proposizione ora stabilita, che ci sarà utile in seguito.

Corollario 3.19. *Sia S' separato, $\pi : S' \to S$ un morfismo birazionale, $j : Y \to S$ una inclusione di un punto infinitamente vicino Q di S, $g_1 : Y \to S'$ e $g_2 : Y \to S'$ due morfismi tali che $\pi \circ g_1 = \pi \circ g_2 = j$, e sia infine P_Y il punto chiuso di Y. Allora si ha $g_1(P_Y) = g_2(P_Y)$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, essendo j e π birazionali, g_1 e g_2 sono inclusioni di due punti infinitamente vicini di S', diciamo P_1 e P_2. Per il lemma 3.15, $g_1(P_Y)$ e $g_2(P_Y)$ sono punti chiusi di S', con anello locale regolare di dimensione due. Detto $\eta_{S'}$ il punto generico di S', poiché $j = \pi \circ g_1$ e $j = \pi \circ g_2$, si ha $\mathcal{O}_{S',P_1} = \pi^\sharp_{\eta_{S'}}(\mathcal{O}_{S,Q}) = \mathcal{O}_{S',P_2}$, dunque per la proposizione 3.18, $P_1 = P_2$. Posto $P' = P_1$ $(= P_2)$, poiché g_1 fattorizza per un morfismo canonico di $g_1(P_Y)$ e g_2 fattorizza per un morfismo canonico di $g_2(P_Y)$ si ha per il lemma 3.12 che $\mathcal{O}_{P'}$ contiene sia $\mathcal{O}_{g_1(P_Y)}$, sia $\mathcal{O}_{g_2(P_Y)}$. Ma la proposizione 3.18 afferma che $\mathcal{O}_{P'}$ contiene l'anello locale di un unico punto chiuso di S', dunque deve essere $g_1(P_Y) = g_2(P_Y)$. □

Relazione di successione tra punti infinitamente vicini.

Per stabilire la compatibilità della definizione 3.2 con la definizione 1.1, conviene prima introdurre la definizione di "punti infinitamente vicini successivi", che sarà ampiamente utilizzata anche nel seguito.

Proposizione 3.20. *Siano P, Q punti infinitamente vicini di uno schema S. Consideriamo le seguenti condizioni:*

(a) *Per ogni inclusione di P, $i : X \to S$, e per ogni inclusione di Q, $j : Y \to S$, esiste un morfismo $f : Y \to X$ tale che $j = i \circ f$;*

(b) *$\mathcal{O}_Q \supseteq \mathcal{O}_P$, ed esistono un'inclusione di P, $i' : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P \to S$, un'inclusione di Q, $j' : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q \to S$ tali che, detta $\varphi : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_Q$ l'inclusione, $j' = i' \circ \operatorname{Spec} \varphi$;*

(c) *$\mathcal{O}_Q \supseteq \mathcal{O}_P$.*

Si ha che (a) e (b) sono equivalenti e implicano (c). Se S è separato anche (c) è equivalente ad (a) e (b).

Dimostrazione. (a)$\Rightarrow$(b) Per il lemma 3.12 si ha subito $\mathcal{O}_Q \supseteq \mathcal{O}_P$, e sia φ l'inclusione. Per il lemma 3.14, c'è un unico punto infinitamente vicino con anello locale $\mathcal{O}_Q$ e tale che una sua inclusione fattorizzi per i, poiché Q verifica tali condizioni, valgono per Q le asserzioni fatte alla fine del lemma 3.14, e cioé: si può scegliere j in modo che $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q$, $f = \omega_X^{-1} \circ a \circ \operatorname{Spec} \varphi$, dove a è un isomorfismo $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ e $\omega_X : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ è l'isomorfismo naturale. Ponendo $j' = j$ e $i' = i \circ \omega_X^{-1} \circ a$, si ha subito che i' è un'inclusione di P, perché $\omega_X^{-1} \circ a$ è un isomorfismo, e che $j' = j = i \circ f = i \circ \omega_X^{-1} \circ a \circ \operatorname{Spec} \varphi = i' \circ \operatorname{Spec} \varphi$.

(b)$\Rightarrow$ (a) Sia $i : X \to S$ una inclusione di P, $j : Y \to S$ un'inclusione di Q. Per la definizione di equivalenza devono esistere due isomorfismi $g_1 : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ e $g_2 : Y \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q$ tali che $i = i' \circ g_1$ e $j = j' \circ g_2$. Se poniamo $f = g_1^{-1} \circ \operatorname{Spec} \varphi \circ g_2$, si ha $j = j' \circ g_2 = i' \circ \operatorname{Spec} \varphi \circ g_2 = i \circ g_1^{-1} \circ \operatorname{Spec} \varphi \circ g_2 = i \circ f$.

(b)$\Rightarrow$ (c) Ovvio.

Supponiamo ora che S sia separato e che valga (c), e dimostriamo (a). Il lemma 3.14 assicura che esiste un punto infinitamente vicino Q' tale che una sua inclusione j' fattorizzi per i e tale che $\mathcal{O}_{Q'} = \mathcal{O}_Q$. Ma per la proposizione 3.18, l'anello locale individua il punto, dunque $Q' = Q$, e perciò j' fattorizza per i. Poiché j' è equivalente a j essendo queste due inclusioni dello stesso punto, j fattorizza per j' (tramite un isomorfismo), e dunque j fattorizza tramite i, come volevamo. □

Definizione 3.21. Siano P, Q punti infinitamente vicini di uno schema S. Diremo che Q *segue* P (o, più raramente, Q *è infinitamente vicino a* P), e scriveremo $Q \succeq P$, se valgono le condizioni equivalenti (a), (b) (e quindi anche (c)) della proposizione 3.20.

Proposizione 3.22. *La relazione nell'insieme dei punti infinitamente vicini di S, data da $\succeq$, è una relazione d'ordine.*

Dimostrazione. Per dimostrare la riflessività, cioè che $P \succeq P$ basta osservare che, nella condizione (a) della proposizione 3.20, i e j sono equivalenti, perché inclusioni di uno stesso punto, e dunque esiste f (ed è un isomorfismo).

Dimostriamo l'antisimmetria. Siano P e Q due punti infinitamente vicini di uno schema S, con inclusioni rispettive $i : X \to S$ e $j : Y \to S$, tali che $P \succeq Q$ e $Q \succeq P$.

Per la condizione (c) della proposizione 3.20, $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_Q$, inoltre per la condizione (a) della stessa proposizione, j fattorizza tramite i. Poiché ovviamente anche i fattorizza tramite sé stessa, deve essere $P = Q$ per il lemma 3.14.

Transitività. Sia $R \succeq Q \succeq P$, sia $i : X \to S$ un'inclusione di P e $k : Z \to S$ un'inclusione di R. Siccome $R \succeq Q \succeq P$, detta $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, per la condizione (a) della proposizione 3.20, esiste $f : Y \to X$ tale che $j = i \circ f$ e $g : Z \to Y$ tale che $k = j \circ g$. Allora $f \circ g : Z \to X$ è tale che $k = j \circ g = i \circ f \circ g$, e dunque, per la condizione (a) della proposizione 3.20, $R \succeq P$. □

Definizione 3.23. La relazione $\succeq$ (*seguire*) dà luogo, come ogni relazione d'ordine, ad altre relazioni, e precisamente:
— La relazione opposta *precedere*, indicata con $\preceq$, è definita da

$$P \preceq Q \iff Q \succeq P$$

— La relazione di ordine stretto *seguire strettamente*, indicata con $\succ$, è definita da

$$P \succ Q \iff P \succeq Q \text{ e } P \neq Q$$

— La relazione *precedere strettamente*, indicata con $\prec$, è definita da

$$P \prec Q \iff Q \succ P$$

— La relazione "di copertura" *susseguire* (o *essere successivo* o *essere infinitamente vicino nel primo intorno di*), indicata con $\vdash$, è definita da

$$P' \vdash P \iff (P' \succ P \text{ e se } P' \succeq Q \succeq P \text{ allora } Q = P \text{ o } Q = P')$$

— L'opposta di quest'ultima, *essere immediatamente precedente*, indicata con $\dashv$, è definita da

$$P \dashv Q \iff Q \vdash P \quad .$$

Un punto P di un insieme $\mathbf{e}$ si dirà *massimale* se non ci sono in $\mathbf{e}$ punti che seguono P, si dirà *minimale* se non ci sono in $\mathbf{e}$ punti che precedono P.

Naturalmente non bisogna confondere i punti infinitamente vicini massimali di un insieme $\mathbf{e}$ con i punti generici massimali di S.

Proposizione 3.24. *Se P e Q sono punti infinitamente vicini di S e $P \prec Q$ allora $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_Q$.*

Dimostrazione. Siano i un'inclusione di P e j un'inclusione di Q. Poiché $P \prec Q$, j fattorizza per i (cfr. proposizione 3.20a) e $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_Q$ (cfr. proposizione 3.20c). Se fosse $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_Q$, dato che sia j fattorizza per i, e ovviamente anche i fattorizza per sé stessa, si avrebbe $P = Q$, per il lemma 3.14 (che afferma l'unicità del punto con assegnato anello locale e tale che una sua inclusione fattorizzi per i), mentre P precede strettamente Q. Dunque $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_Q$. □

Proposizione 3.25. *Sia $\pi : S \to S'$ un morfismo birazionale, e siano P e Q punti infinitamente vicini di S. Allora si ha:*

(a) $Q \succeq P \Rightarrow \pi_*(Q) \succeq \pi_*(P)$, *e se S è separato* $\pi_*(Q) \succeq \pi_*(P) \Rightarrow Q \succeq P$;

(b) $Q \succ P \Rightarrow \pi_*(Q) \succ \pi_*(P)$, *e se S è separato* $\pi_*(Q) \succ \pi_*(P) \Rightarrow Q \succ P$;

(c) $Q \vdash P \Rightarrow \pi_*(Q) \vdash \pi_*(P)$ *e se S è separato* $\pi_*(Q) \vdash \pi_*(P) \Rightarrow Q \vdash P$.

Inoltre, se P è un punto chiuso di S, che sia anche un punto infinitamente vicino di S, e se $\pi(P)$ è regolare, allora $\pi(P)$ è un punto infinitamente vicino di S' e si ha

$$\pi_*(P) \succeq \pi(P).$$

Dimostrazione. Siano $i : X \to S$ un'inclusione di P e $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, e sia η_S il punto generico di S.

Se $Q \succeq P$ allora esiste $f : Y \to X$ tale che $j = i \circ f$, dunque $\pi \circ j = \pi \circ i \circ f$. Ma $\pi \circ j$ e $\pi \circ i$ sono inclusioni rispettivamente di $\pi_*(Q)$ e $\pi_*(P)$, dunque $\pi_*(Q) \succeq \pi_*(P)$. Viceversa, sia $\pi_*(Q) \succeq \pi_*(P)$ ed S separato. Allora $\mathcal{O}_{S',\pi_*(Q)} \supseteq \mathcal{O}_{S',\pi_*(P)}$. Ma $\pi^\sharp_{\eta_S}$ è un isomorfismo e si ha $\mathcal{O}_{S,P} = \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',\pi_*(P)})$ e $\mathcal{O}_{S,Q} = \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',\pi_*(Q)})$. Dunque $\mathcal{O}_{S,Q} \supseteq \mathcal{O}_{S,P}$, e dato che S è separato, questo implica che $Q \succeq P$ (per la proposizione 3.20). Resta così dimostrato (a).

Sia ora $Q \succ P$. Per il punto (a) abbiamo $\pi_*(Q) \succeq \pi_*(P)$. Se fosse $\pi_*(Q) = \pi_*(P)$, avremmo $\mathcal{O}_{S,Q} = \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',\pi_*(Q)}) = \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',\pi_*(P)}) = \mathcal{O}_{S,P}$, mentre per la proposizione 3.24 $\mathcal{O}_{S,P} \subset \mathcal{O}_{S,Q}$. Dunque non può essere $\pi_*(Q) = \pi_*(P)$, perciò $\pi_*(Q) \succ \pi_*(P)$. Viceversa, sia S separato e $\pi_*(Q) \succ \pi_*(P)$. Per il punto (a) si ha $Q \succeq P$, e non può aversi $P = Q$, altrimenti $\pi_*(Q) = \pi_*(P)$. Dunque $Q \succ P$, e anche (b) è dimostrato.

Sia $Q \vdash P$. Allora per la parte (b) si ha $\pi_*(Q) \succ \pi_*(P)$. Supponiamo per assurdo che esista un punto infinitamente vicino R' di S' tale che $\pi_*(Q) \succ R' \succ \pi_*(P)$. Allora, per la proposizione 3.24, si ha $\mathcal{O}_{\pi_*(Q)} \supset \mathcal{O}_{S',R'} \supset \mathcal{O}_{\pi_*(P)}$, dunque considerando le immagini tramite $\pi^\sharp_{\eta_S}$, si ha $\mathcal{O}_Q \supset \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',R'}) \supset \mathcal{O}_P$. Per il lemma 3.14 esiste un punto infinitamente vicino R di S tale che una sua inclusione k fattorizzi tramite i e tale che $\mathcal{O}_{S,R} = \pi^\sharp_{\eta_S}(\mathcal{O}_{S',R'})$, ed esiste un unico punto infinitamente vicino Q_2 di S tale che una sua inclusione j_2 fattorizzi per k (e quindi per i) e tale che $\mathcal{O}_{Q_2} = \mathcal{O}_Q$. Siccome sia Q che Q_2 sono tali che una loro inclusione fattorizzi per i e hanno lo stesso anello locale, di nuovo il lemma 3.14 implica che $Q = Q_2$. L'esistenza di j_2 e k assicura che $Q \succeq R \succeq P$ e il fatto che $\mathcal{O}_Q \supset \mathcal{O}_R \supset \mathcal{O}_P$ assicura che non possono valere le uguaglianze $Q = R$ o $R = P$, il che è in contrasto con $Q \vdash P$. Dunque non può esistere R', il che basta per affermare che $\pi_*(Q) \vdash \pi_*(P)$. Viceversa sia S separato e $\pi_*(Q) \vdash \pi_*(P)$. Allora per il punto (b) si ha $Q \succ P$. Se esistesse R tale che $Q \succ R \succ P$, sempre per il punto (b) si avrebbe $\pi_*(Q) \succ \pi_*(R) \succ \pi_*(P)$, in contrasto con $\pi_*(Q) \vdash \pi_*(P)$. Dunque $Q \vdash P$.

Se ora P è un punto chiuso di S che sia anche un punto infinitamente vicino di S, allora P ha anello locale di dimensione due, e quindi per il lemma 3.15 $\pi(P)$ è un punto chiuso di S' con anello locale di dimensione due, ed essendo regolare per ipotesi, è un punto infinitamente vicino di S'. Se $i : X \to S$ è un morfismo canonico di P, i manda il punto chiuso di X in P. Una inclusione di $\pi_*(P)$ è $\pi \circ i$ che, poiché manda il punto chiuso di X in $\pi(P)$, fattorizza per un morfismo canonico di $\pi(P)$ e dunque $\pi_*(P) \succeq \pi(P)$. □

La compatibilità della definizione 3.2 con la definizione 1.1 segue essenzialmente da [Abhyankar, teorema 3, pag. 343] (cfr. anche [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman]). Stabiliremo ora un lemma che dimostra, con qualche modifica rispetto al lavoro originale, il punto essenziale di tale risultato.

Lemma 3.26. *Siano A e B sottoanelli locali regolari di dimensione due di un campo K, tali che $A \subset B$ ($A \neq B$) e K sia campo dei quozienti di A. Allora l'estensione in B dell'ideale massimale di A è principale.*

Dimostrazione. In questa dimostrazione considereremo, come è d'uso, le localizzazioni dei sottoanelli di K ancora come sottoanelli di K (*).

Sia $\mathfrak{m}_A$ l'ideale massimale di A. Poiché A è locale regolare di dimensione due, $\mathfrak{m}_A$ è generato da due elementi x, y (cfr. [Atiyah-Macdonald, proposizione 11.22]; si dice che x, y formano un sistema regolare di parametri). Se $x^{-1}y \in B$ allora l'estensione $\mathfrak{m}_A B$ di $\mathfrak{m}_A$ in B, è generata da x e dunque è principale. Lo stesso ragionamento vale se $xy^{-1} \in B$. Ci basta allora dimostrare che non può aversi $x^{-1}y \notin B$ e $xy^{-1} \notin B$.

Sia per assurdo $x^{-1}y \notin B$ e $xy^{-1} \notin B$. Poiché B è locale regolare, è un dominio a fattorizzazione unica (cfr. [Matsumura, teorema 48, pag. 142]), dunque esisterà in B un massimo comun divisore z di x e y. Si avrà allora $x = az$, $y = bz$, con a e b elementi non invertibili di B, altrimenti si avrebbe $xy^{-1} = ab^{-1} \in B$ oppure $x^{-1}y = a^{-1}b \in B$; ma anche z non è invertibile. Infatti, siccome $A \subset B$ esiste un elemento di $B - A$, che, dato che K è campo dei quozienti di A, sarà del tipo fg^{-1}, con $f \in A$, $g \in \mathfrak{m}_A$ (altrimenti $fg^{-1} \in A$). Poiché anche A, essendo locale regolare, è un dominio a fattorizzazione unica, possiamo supporre che f e g siano primi tra loro. Inoltre, dato che x, y non sono invertibili in B, B domina A (in accordo con il lemma 2.30), e dunque $g \in \mathfrak{m}_B$. Sia g_A un fattore irriducibile di g in A, g_B un fattore irriducibile di g in B, $g_A A$ l'ideale generato da g_A in A e $g_B B$ l'ideale generato da g_B in B. Siccome $f = gfg^{-1}$, $f \in gB \subseteq g_B B$, mentre siccome f e g sono primi tra loro, $f \notin g_A A$. Si ha allora in A la catena di ideali primi $0 \subset g_A A \subset (g_B B) \cap A$. Poiché dim $A = 2$, $(g_B\ B) \cap A = \mathfrak{m}_A$. Dunque g_B è un fattore comune di x e y, perciò z non è invertibile.

Sia ora $t = xy^{-1}$, $\mathfrak{p}_B$ l'estensione di $\mathfrak{m}_B$ in $B[t]$, e $\mathfrak{p}_A$ l'estensione di $\mathfrak{m}_A$ in $A[t]$. Abbiamo che A e B, essendo domini a fattorizzazione unica, sono integralmente chiusi, che t e t^{-1} non appartengono a B, e a maggior ragione non appartengono ad A, e siccome chiaramente $A = A_{\mathfrak{m}_A}$ e $B = B_{\mathfrak{m}_B}$, per [Zariski-Samuel, capitolo VI, paragrafo 5, corollario a pag. 20], $\mathfrak{p}_A$ e $\mathfrak{p}_B$ sono ideali primi le cui contrazioni sono rispettivamente $\mathfrak{m}_A$ e $\mathfrak{m}_B$, e sono tali che la classe $t + \mathfrak{p}_A$ è trascendente su (l'immagine isomorfa di) $A/\mathfrak{m}_A$ in $A[t]/\mathfrak{p}_A$, e la classe $t + \mathfrak{p}_B$ è trascendente su (l'immagine isomorfa di) $B/\mathfrak{m}_B$ in $B[t]/\mathfrak{p}_B$. A questo

(*) Più precisamente, se S è un sottoanello di K, $\iota : S \to K$ è l'inclusione, e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di S, poiché K è un campo, se $g \in S - \mathfrak{p}$ allora è invertibile in K. Dunque per [Atiyah-Macdonald, corollario 3.2] c'è un omomorfismo naturale $S_{\mathfrak{p}} \to K$, che si verifica facilmente essere iniettivo e la cui immagine è il sottoanello di K formato da tutti gli elementi del tipo fg^{-1} con $f \in S$ e $g \in S - \mathfrak{p}$. Tale sottoanello sarà per noi identificato con $S_{\mathfrak{p}}$.

punto dimostriamo che $\mathfrak{p}_B \cap A[t] = \mathfrak{p}_A$. Siccome $(\mathfrak{p}_B \cap A[t]) \cap A = \mathfrak{p}_B \cap A = \mathfrak{p}_B \cap B \cap A = \mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$, sarà sicuramente $\mathfrak{p}_A \subseteq \mathfrak{p}_B \cap A[t]$. Se per assurdo tale inclusione fosse stretta, avremmo la catena di ideali primi di $A[t]$, $0 \subset \mathfrak{p}_A \subset \mathfrak{p}_B \cap A[t]$. Poiché, per il lemma 2.30, $\dim A[t] \leq 2$, $\mathfrak{p}_B \cap A[t]$ deve essere massimale. Consideriamo l'immagine isomorfa del campo $A[t]/(\mathfrak{p}_B \cap A[t])$ in $B[t]/\mathfrak{p}_B$: tale immagine, che sarà anch'essa un campo, contiene t, e questo è assurdo perché (identificando $B/\mathfrak{m}_B$ con la sua immagine isomorfa in $B[t]/\mathfrak{p}_B$) $B[t]/\mathfrak{p}_B = (B/\mathfrak{m}_B)[t]$, con t trascendente su $B/\mathfrak{m}_B$ e dunque chiaramente non invertibile. Dunque $\mathfrak{p}_B \cap A[t] = \mathfrak{p}_A$.

Osserviamo ora che $\mathfrak{p}_A$ è generato da y (perché $t = xy^{-1}$, $\mathfrak{p}_A$ è l'estensione di $\mathfrak{m}_A$ e $\mathfrak{m}_A$ è generato da y e $x = ty$), dunque la localizzazione $A[t]_{\mathfrak{p}_A}$ ha l'ideale massimale generato da y, ed è dunque un anello di valutazione discreta (basta infatti osservare che tale anello è locale e noetheriano, ha dimensione uno per [Atiyah-Macdonald, teorema 11.14] ed è dunque un anello di valutazione discreta per [Atiyah-Macdonald, proposizione 9.2(iii)]). Poiché $B[t]_{\mathfrak{p}_B}$ domina $A[t]_{\mathfrak{p}_A}$, per la massimalità degli anelli di valutazione discreta, si ha che $B[t]_{\mathfrak{p}_B} = A[t]_{\mathfrak{p}_A}$. Chiamiamo A_v questo anello, $\mathfrak{m}_v$ il suo ideale massimale, che è generato da y, e sia $v : K - \{0\} \to \mathbf{Z}$ la valutazione associata ad A_v (cioè $v(s)$ è il massimo intero n tale che $sy^{-n} \in A_v$, essendo y un generatore di $\mathfrak{m}_v$). Allora si ha $v(y) = 1$, e $y = bz$, con b, z non invertibili in B, e quindi appartenenti a $\mathfrak{m}_B \subset \mathfrak{m}_v$. Ma questa è una contraddizione, perché $y, z \in \mathfrak{m}_v \Rightarrow v(z) \geq 1, v(b) \geq 1$, e dunque si avrebbe $1 = v(y) = v(bz) = v(b) + v(z) \geq 2$. □

Proposizione 3.27. *Siano P e Q due punti infinitamente vicini di S, tali che $P \prec Q$, sia $i : X \to S$ un'inclusione di P, $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, e sia $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo il suo punto chiuso P_X. Allora esiste un morfismo $f : Y \to X$, tale che $j = i \circ f$, e un morfismo $g : Y \to \tilde{X}$, tale che $f = \pi \circ g$.*

Dimostrazione. Poiché $P \prec Q$, si ha $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_Q$ (cfr. proposizione 3.24), e possiamo considerare inclusioni di P e Q rispettivamente del tipo $i' : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P \to S$, $j' : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q \to S$, tali che, detta $\varphi : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_Q$ l'inclusione e posto $f' = \operatorname{Spec} \varphi$, si abbia $j' = i' \circ f'$ (cfr. proposizione 3.20b). Esistono dunque isomorfismi $a : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ e $b : Y \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q$ tali che $i = i' \circ a$, $j = j' \circ b$. Possiamo allora porre $f = a^{-1} \circ f' \circ b$, e ottenere $j = j' \circ b = i' \circ f' \circ b = i \circ a^{-1} \circ f' \circ b = i \circ f$.

Se $\pi' : (\widetilde{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P}) \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ è il morfismo di scoppiamento di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ lungo il suo punto chiuso, immagine di P_X tramite a, allora esiste un isomorfismo $\tilde{a} : \tilde{X} \to (\widetilde{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P})$ tale che $\pi' \circ \tilde{a} = a \circ \pi$ (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, corollario 7.15], il fatto che sia un isomorfismo discende dall'unicità affermata in tale corollario, e dall'esistenza di a^{-1}). Se dimostriamo che esiste $g' : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q \to (\widetilde{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P})$ tale che $f' = \pi' \circ g'$, allora $f = a^{-1} \circ f' \circ b = a^{-1} \circ \pi' \circ g' \circ b = \pi \circ \tilde{a}^{-1} \circ g' \circ b$, e dunque basta porre $g = \tilde{a}^{-1} \circ g' \circ b$.

Per la proprietà universale dello scoppiamento (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.14]), g' esiste se, detto $\mathcal{I}$ il fascio di ideali del punto chiuso di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$, il fascio $f'^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_Q}$ è invertibile. Dimostriamo dunque questo fatto.

Sia $\mathfrak{m}_P$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_P$, cioè il punto chiuso di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$, e sia $p : \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P$ la proiezione canonica. Il fascio di ideali di $\mathfrak{m}_P$ è il fascio di ideali del sottoschema chiuso di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$, dato da $\{\mathfrak{m}_P\}$ con la struttura ridotta, e dunque una immersione chiusa di tale sottoschema è $\operatorname{Spec} p$ (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 3, esempi

3.2.3 e 3.2.6]). Applichiamo ora il funtore di fascificazione $\widetilde{\ }$ (da non confondere con lo scoppiamento; cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 5, proposizione 5.2a e corollario 5.5]) alla successione esatta di $\mathcal{O}_P$-moduli

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_P \stackrel{\iota_{\mathfrak{m}_P}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_P \stackrel{p}{\longrightarrow} \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P \longrightarrow 0,$$

dove $\iota_{\mathfrak{m}_P}$ è l'inclusione. Poiché segue subito dalle definizioni che $\widetilde{\mathcal{O}_P}$ è $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P}$ (come fascio di moduli), che $(\widetilde{\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P}) = (\mathrm{Spec}\ p)_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P}$ e che $\tilde{p} = (\mathrm{Spec}\ p)^\sharp$, otteniamo la successione esatta di $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P}$-moduli

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{m}_P} \stackrel{\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P} \stackrel{(\mathrm{Spec}\ p)^\sharp}{\longrightarrow} (\mathrm{Spec}\ p)_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P} \longrightarrow 0.$$

Il fascio di ideali $\mathcal{I}$ è per definizione $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Spec}\ p)^\sharp = \mathrm{Im}\ \widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}$; se dunque $\iota_{\mathcal{I}}$ è l'inclusione di $\mathcal{I}$ in $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P}$, dato che $\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}$ è iniettivo, si ha $\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}} = i_{\mathcal{I}} \circ h$, con $h : \widetilde{\mathfrak{m}_P} \to \mathcal{I}$ isomorfismo.

Ora si ha $f'^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_Q} = \mathrm{Im}\ f'^*(\iota_{\mathcal{I}})$ (*). Ma $f'^*(\iota_{\mathcal{I}}) = f'^*(\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}} \circ h^{-1}) = f'^*(\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}) \circ f'^*(h^{-1})$, e poiché $f'^*(h^{-1})$ è un isomorfismo, il nostro asserto sarà dimostrato se proviamo che $\mathrm{Im}\ (f'^*(\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}))$ è invertibile.

Innanzitutto osserviamo che $\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}}$ è un morfismo $f'^*(\widetilde{\mathfrak{m}_P}) \to f'^*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P}) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_Q}$ e che, per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 5, proposizione 5.2e], si ha un isomorfismo $f'^*(\widetilde{\mathfrak{m}_P}) \cong (\widetilde{\mathfrak{m}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_Q})$. Ma tale isomorfismo si verifica direttamente che è funtoriale (cfr. [Grothendieck-Dieudonné, capitolo I, 1.7.7]) per cui $f'^*(\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P}})$ corrisponde tramite isomorfismi naturali a $(\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q}})$ e quindi si ha $\mathrm{Im}\ (f'^*(\widetilde{\mathfrak{m}_P})) \cong \mathrm{Im}\ (\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q}})$. Poiché $\widetilde{\ }$ è esatto, $\mathrm{Im}\ (\widetilde{\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q}}) \cong (\widetilde{\mathrm{Im}\ (\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q})})$. Ma l'ideale $\mathrm{Im}\ (\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q})$ è esattamente l'estensione di $\mathfrak{m}_P$ in $\mathcal{O}_Q$, che è un ideale principale per il lemma 3.26, e un ideale principale di un dominio di integrità è isomorfo, come modulo, all'anello a cui appartiene, cioè è libero di rango uno. Dunque $\mathrm{Im}\ (f'^*(\widetilde{\mathfrak{m}_P})) \cong (\widetilde{\mathrm{Im}\ (\iota_{\mathfrak{m}_P} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_Q})})$ è libero di rango uno, perciò è invertibile. $\square$

Lemma 3.28. *Siano P e Q due punti infinitamente vicini di S, $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, $j : Y \to S$ una inclusione di Q, P_Y il punto chiuso di Y, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo P_X, $f : Y \to X$ un morfismo tale che $j = i \circ f$, $g : Y \to \tilde{X}$ un morfismo tale che $f = \pi \circ g$, e sia infine $P' = g(P_Y)$. Allora P' è un punto chiuso di $\tilde{X}$, che è anche un punto infinitamente vicino, e si ha $P \dashv (i \circ \pi)_*(P') \preceq Q$. Inoltre, se P'' è un punto infinitamente vicino di S tale che $P \prec P'' \preceq Q$, allora $P'' \succeq (i \circ \pi)_*(P')$.*

Dimostrazione. Il morfismo f è birazionale perché lo sono i e j, e g è birazionale perché lo sono f e π. Dunque g è un'inclusione di un punto infinitamente vicino di $\tilde{X}$, perciò,

(*) Cfr. [Hartshorne, capitolo II, avvertenza 7.12.2]. La scrittura $f'^*(\iota_{\mathcal{I}})$ è giustificata dal fatto che f'^* è un funtore tra fasci di moduli su $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_P$ e fasci di moduli su $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_Q$ (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 5, pag. 110] o [Grothendieck-Dieudonné, capitolo 0, 4.3, pag. 97]), e la costruzione di $f'^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_Q}$ che troviamo nella citata avvertenza consiste proprio nel considerare l'immagine di $f'^*(\iota_{\mathcal{I}})$.

per il lemma 3.15, $P' = g(P_Y)$ è un punto chiuso di $\tilde{X}$, con anello locale di dimensione due, e poiché $\tilde{X}$ è regolare, è anche un punto infinitamente vicino di $\tilde{X}$. Si ha poi, poiché X è locale e per il lemma 3.15, che $f(P_Y) = P_X$. Tenendo conto della proposizione 3.25 possiamo scrivere $(i \circ \pi)_*(P') = (i \circ \pi)_*(g(P_Y)) \preceq (i \circ \pi)_*(g_*(P_Y)) = (i \circ \pi \circ g)_*(P_Y) = (i \circ f)_*(P_Y) = j_*(P_Y) = Q$, e se dimostriamo che $P_X \prec \pi_*(P')$ possiamo anche scrivere $P = i_*(P_X) \prec i_*(\pi_*(P')) = (i \circ \pi)_*(P')$, e ottenere in definitiva $P \prec (i \circ \pi)_*(P') \preceq Q$.

Per dimostrare che $P_X \prec \pi_*(P')$, basta dimostrare che $P_X \neq \pi_*(P')$, in quanto $P_X = f(P_Y) = \pi(g(P_Y)) = \pi(P') \preceq \pi_*(P')$. Supponiamo quindi per assurdo che sia $P_X = \pi_*(P')$. Sia $i' : X' \to \tilde{X}$ un morfismo canonico relativo a P' e siano $P_{X'}$ ed $\eta_{X'}$ rispettivamente il punto chiuso e il punto generico di X'. Siccome $\pi_*(P') = P_X$, $\pi \circ i'$ è un morfismo canonico relativo a P_X, e dunque è un omeomorfismo sull'immagine, in particolare è iniettivo e $\pi(P') = (\pi \circ i)(P_{X'}) = P_X$. Ma allora $\pi^{-1}(P_X)$, che è un divisore di $\tilde{X}$, cioè un chiuso irriducibile di codimensione uno, contiene P', e dunque il suo punto generico η sta nell'immagine di i', perché questo è un morfismo canonico relativo a P'; perciò $\eta = i'(\eta')$ per un certo η' in X'. Ma η' è certamente distinto da $P_{X'}$ (perché altrimenti $\eta = P_X$, e quindi si avrebbe $\pi^{-1}(P_X) = \overline{\{\eta\}} = \overline{\{P_{X'}\}} = \{P_{X'}\}$, mentre $\pi^{-1}(P_X)$ ha codimensione uno e $P_{X'}$ ha codimensione due), e inoltre $(\pi \circ i')(P_{X'}) = P_X = \pi(\eta) = \pi(i'(\eta')) = (\pi \circ i')(\eta')$, in contrasto con l'iniettività di $\pi \circ i'$.

Prima di dimostrare che $P \dashv (i \circ \pi)_*(P')$ dimostriamo la seconda parte dell'asserto. Supponiamo dunque che $P \prec P'' \preceq Q$, e sia $i'' : X'' \to S$ una inclusione di P''. Poiché $P \prec P''$, per la proposizione 3.27, esiste un $f'' : X'' \to X$ tale che $i'' = i \circ f''$, e un $g'' : X'' \to \tilde{X}$ tale che $f'' = \pi \circ g''$. Poiché $P'' \preceq Q$, esiste $h : Y \to X''$ tale che $j = i'' \circ h$. Rileviamo ora che, poiché π è separato (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.10a]) e X è separato perché affine, $\tilde{X}$ è separato (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 4, corollario 4.6b]), e inoltre, essendo i e π birazionali, $i \circ \pi$ è birazionale. Abbiamo allora il morfismo birazionale $i \circ \pi : \tilde{X} \to S$, con $\tilde{X}$ separato, l'inclusione $j : Y \to S$ di Q, il morfismo $g : Y \to \tilde{X}$ tale che $j = (i \circ \pi) \circ g$, e il morfismo $g'' \circ h$ tale che $j = (i \circ \pi) \circ (g'' \circ h)$ (perché $j = i'' \circ h = i \circ f'' \circ h = i \circ \pi \circ g'' \circ h$): possiamo applicare il corollario 3.19 e ottenere $g(P_Y) = (g'' \circ h)(P_Y)$. Detto $P_{X''}$ il punto chiuso di X'', dato che h è birazionale (perché $j = i'' \circ h$) e X'' è locale, per il lemma 3.15 deve essere $h(P_Y) = P_{X''}$. Dunque $P'' = i''_*(P_{X''}) = i''_*(h(P_Y)) = (i \circ \pi \circ g'')_*(h(P_Y)) = (i \circ \pi)_*(g''_*(h(P_Y))) \succeq (i \circ \pi)_*(g''(h(P_Y))) = (i \circ \pi)_*(g(P_Y)) = (i \circ \pi)_*(P')$, come volevamo.

A questo punto si ha facilmente che $P \dashv (i \circ \pi)_*(P')$. Infatti già abbiamo dimostrato che $P \prec (i \circ \pi)_*(P')$. Se poi $P \preceq P'' \preceq (i \circ \pi)_*(P')$, allora o $P'' = P$, o altrimenti $P \prec P'' \preceq (i \circ \pi)_*(P') \preceq Q$, e allora, per quanto ora dimostrato, $P'' \succeq (i \circ \pi)_*(P')$, dunque $P'' = (i \circ \pi)_*(P')$. □

Dimostriamo ora una notevole proprietà della relazione $\succeq$, la quale tra l'altro ci permetterà di stabilire l'equivalenza delle definizioni 1.1 e 3.2. Il punto fondamentale di tale dimostrazione è in sostanza l'ultima parte della dimostrazione del citato [Abhyankar, teorema 3, pag. 343], che è qui sensibilmente semplificata rispetto al lavoro originale.

Proposizione 3.29. *Se $P \preceq Q$ sono punti infinitamente vicini di S, allora esiste un'unica sequenza finita $P_0, \ldots, P_n$ di punti infinitamente vicini di S tale che $P = P_0 \dashv \cdots \dashv P_n = Q$.*

Dimostrazione. Incominciamo a provare per induzione su n che vale la seguente implicazione:

se esistono $P_0, \dots, P_n, P'_0, \dots, P'_n$ tali che $P = P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \preceq Q, P = P'_0 \dashv P'_1 \dashv \cdots \dashv P'_n \preceq Q$ allora $P_i = P'_i$ per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Per $n = 0$ basta osservare che $P_0 = P = P'_0$. Sia $n > 0$, e supponiamo che $\exists P_0, \dots, P_n, P'_0, \dots, P'_n : P = P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \preceq Q, P = P'_0 \dashv P'_1 \dashv \cdots \dashv P'_n \preceq Q$. Per l'ipotesi di induzione si ha subito $P_i = P'_i \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Siccome $P_{n-1} \dashv P_n \preceq Q$, si ha $P_{n-1} \prec Q$, e dunque per la proposizione 3.27, detta $i : X \to S$ un'inclusione di P_{n-1}, $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, e $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo il suo punto chiuso P_X, esistono morfismi $f : Y \to X$ e $g : Y \to \tilde{X}$ tali che $j = i \circ f$ ed $f = \pi \circ g$. Applicando il lemma 3.28, si ha, detto P_Y il punto chiuso di Y e posto $R = (i \circ \pi)_*(g(P_Y))$, che $P_{n-1} \dashv R \preceq Q$ e, dato che $P_{n-1} \dashv P_n \preceq Q$ e $P_{n-1} = P'_{n-1} \dashv P'_n \preceq Q$, che $P_n \succeq R (\vdash P_{n-1})$, $P'_n \succeq R (\vdash P_{n-1})$. Ma dato che $P_n \vdash P_{n-1}$ e $P'_n \vdash P_{n-1}$, ciò è possibile solo se $P_n = P'_n = R$, il che conclude la dimostrazione dell'implicazione.

Dunque per ogni n esiste al più un P_n che faccia parte di una catena del tipo $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \preceq Q$. Sia N l'insieme degli interi n tali che esista un P_n che faccia parte di una catena del tipo $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \preceq Q$. Se dimostriamo che esiste un massimo $\bar{n}$ di N, allora deve essere $P_{\bar{n}} = Q$: infatti se fosse $P_{\bar{n}} \prec Q$, di nuovo per la proposizione 3.27 e il lemma 3.28, troveremmo un punto R tale che $P_{\bar{n}} \dashv R \preceq Q$, in contrasto con la massimalità di $\bar{n}$. Dunque se dimostriamo che un tale $\bar{n}$ esiste abbiamo $P = P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_{\bar{n}} = Q$, come volevamo.

Supponiamo per assurdo che N non abbia massimo. Tenendo presente che $0 \in N$, e che inoltre, se $n \in N$ allora tutti gli interi non negativi inferiori ad n appartengono ad n, otteniamo che per ogni intero non negativo n esiste un P_n che faccia parte di una catena del tipo $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \preceq Q$. Per l'unicità di tali catene, dimostrata all'inizio, i P_n formano una catena infinita

$$P = P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \dashv \cdots \preceq Q.$$

Consideriamo la catena (cfr. proposizione 3.24)

$$\mathcal{O}_{P_0} \subset \mathcal{O}_{P_1} \subset \cdots \subset \mathcal{O}_{P_n} \subset \cdots \subset \mathcal{O}_Q.$$

Sia, per ogni $n \geq 0$, $\mathfrak{m}_n$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{P_n}$, $\mathfrak{p}_n$ l'estensione di $\mathfrak{m}_n$ in $\mathcal{O}_Q$, e sia $\mathfrak{m}_Q$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_Q$. Per il lemma 2.30, $\mathcal{O}_Q$ domina ogni $\mathcal{O}_{P_n}$ e $\mathcal{O}_{P_n}$ domina $\mathcal{O}_{P_m}$ se $n \geq m$, dunque abbiamo una catena di ideali di $\mathcal{O}_Q$, $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{m}_Q$, che, poiché $\mathcal{O}_Q$ è noetheriano, è stazionaria. Dunque esiste un ideale di $\mathcal{O}_Q$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ per n abbastanza grande, tale che $\mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_Q$, per ogni n, e che è principale per il lemma 3.26. Inoltre, dato che $\mathfrak{p}$ è principale, mentre ht $\mathfrak{m}_Q = 2$, $\mathfrak{p}$ è incluso strettamente in $\mathfrak{m}_Q$.

Sia ora $x \in \mathfrak{m}_Q - \mathfrak{p}$. Poiché $\mathcal{O}_Q$ domina ogni $\mathcal{O}_{P_n}$ e $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}_n$, allora, per ogni n, $x \notin \mathcal{O}_{P_n}$ e $x^{-1} \notin \mathcal{O}_{P_n}$. Poiché poi $\mathcal{O}_{P_n}$, essendo locale regolare, è un dominio a fattorizzazione unica, otteniamo che per ogni n, x si scrive in un unico modo come $f_n g_n^{-1}$, con f_n e g_n elementi non invertibili e primi tra loro di $\mathcal{O}_{P_n}$. Sia v_n il massimo intero tale che $f_n \in \mathfrak{m}_n^{v_n}$, che esiste perché $\cap_k \mathfrak{m}_n^k = (0)$ (in quanto $\mathcal{O}_{P_n}$ è un dominio di integrità noetheriano; cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo 10, corollario 10.18]), ed è positivo , perché f_n, essendo non invertibile appartiene a $\mathfrak{m}_n$. Dimostriamo ora che se $m > n$ allora $v_m < v_n$. Gli elementi f_n e g_n, essendo non invertibili in $\mathcal{O}_{P_n}$, appartengono ad $\mathfrak{m}_n$, dunque per il lemma 3.26, hanno un divisore comune non invertibile in $\mathcal{O}_{P_m}$ (il generatore dell'estensione di $\mathfrak{m}_n$). Dunque, se h è il massimo comun divisore in $\mathcal{O}_{P_m}$ di f_n e g_n, si ha $f_n = hf_m$, con $h \in \mathfrak{m}_m$. Allora si ha $f_n = hf_m \in \mathfrak{m}_m \cdot \mathfrak{m}_m^{v_m} \subseteq \mathfrak{m}_m^{v_m+1}$ da cui $v_n \geq v_m + 1$. Allora otteniamo una catena di interi positivi $v_0 > v_1 > \cdots > v_n > \cdots$, il che è assurdo. $\square$

D'ora in poi useremo quasi sempre l'ipotesi di regolarità. Ricordiamo che se S è regolare, per la convenzione 3.5, tutti i punti chiusi di S con anello locale di dimensione due, sono anche punti infinitamente vicini di S.

Corollario 3.30. *Se S è regolare, e se P è un punto infinitamente vicino di S, allora esiste un numero finito di punti precedenti P, totalmente ordinati tramite $\succeq$, esiste al più un punto immediatamente precedente P, e non ne esiste alcuno se e solo se P è un punto chiuso di S.*

Dimostrazione. Sia $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, e poniamo infine $P_0 = i(P_X)$, che per il lemma 3.15 è punto chiuso e infinitamente vicino (perché S è regolare) di S. Si ha, per la proposizione 3.25, $P = i_*(P_X) \succeq i(P_X) = P_0$. Per la proposizione 3.29 esiste un'unica catena $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n = P$. Dimostriamo che i punti precedenti Q sono solo i P_i.

Sia Q un punto precedente P, $j : Y \to S$ una inclusione di Q e P_Y il punto chiuso di Y. Poiché $Q \preceq P$, esiste f tale che $i = j \circ f$ e dunque, per il lemma 3.15, $f(P_X) = P_Y$, da cui $j(P_Y) = j(f(P_X)) = i(P_X) = P_0$. Dunque $P \succeq Q = j_*(P_Y) \succeq j(P_Y) = P_0$. Per la proposizione 3.29 esiste un'unica catena $P_0 \dashv Q_1 \dashv \cdots \dashv Q_m = Q$, e un'unica catena $Q \dashv Q_{m+1} \cdots \dashv Q_{m+m'} = P$. Ma, sempre per la proposizione 3.29 la catena $P_0 \dashv Q_1 \dashv \cdots \dashv Q_m = Q \dashv Q_{m+1} \cdots \dashv Q_{m+m'} = P$ e la catena $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n = P$ devono coincidere, dunque $Q = P_m$. Inoltre se $Q \dashv P$, deve essere $Q = P_{n-1}$, dunque esiste al più un punto immediatamente precedente e non ne esiste nessuno se e solo se $n = 0$, cioè se e solo se $P = P_0$. Ma se $P = P_0$ allora P è un punto chiuso di S, e se viceversa P è un punto chiuso di S, allora i è un morfismo canonico di P, ma è anche necessariamente un morfismo canonico di P_0, perché $P_0 = i(P_X)$, dunque $P = P_0$. $\square$

Proposizione 3.31. *Sia S regolare, P un punto chiuso di S (che è anche un punto infinitamente vicino), sia $\pi : \tilde{S} \to S$ il morfismo di scoppiamento di S in P. Allora si ha:*

(a) *se P' è un punto chiuso (e infinitamente vicino) di $\tilde{S}$, che non appartiene al divisore eccezionale $\pi^{-1}(P)$, allora $\pi_*(P') = \pi(P')$;*

(b) *se Q è un punto chiuso (e infinitamente vicino) di $\tilde{S}$, che appartiene al divisore eccezionale $\pi^{-1}(P)$, allora $\pi_*(Q) \vdash \pi(Q) = P$;*

(c) *se Q' è un punto infinitamente vicino di S tale che $Q' \vdash P$, allora esiste un punto chiuso e infinitamente vicino Q di $\tilde{S}$, tale che $Q' = \pi_*(Q)$.*

Dimostrazione. Proviamo (a). Sia $V = S - P$, allora $\pi|_{\pi^{-1}(V),V}$ è un isomorfismo e $\pi(P') \in V$, $P' \in \pi^{-1}(V)$, perché $P' \notin \pi^{-1}(P)$. Preso un morfismo canonico $i : X \to \tilde{S}$, relativo a P', per il corollario 2.16, si ha che $\pi \circ i$ è un morfismo canonico relativo a $\pi(P')$. Per definizione $\pi \circ i$ è una inclusione di $\pi_*(P')$, dunque $\pi_*(P') = \pi(P')$, come volevamo.

Prima di provare (b) e (c) facciamo una piccola premessa. Sia $i : X \to S$ un morfismo canonico relativo a P, P_X il punto chiuso di X, $\pi_X : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X in P_X. Poiché $i^{-1}(P) = P_X$, detto $\mathcal{I}_{P_X}$ il fascio di ideali di P_X e $\mathcal{I}_P$ il fascio di ideali di P, si verifica che $\mathcal{I}_{P_X} = i^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_X$, e dunque per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, corollario 7.15], esiste un unico morfismo $\tilde{i} : \tilde{X} \to \tilde{S}$ tale che $\pi \circ \tilde{i} = i \circ \pi_X$. Tale morfismo è poi birazionale, perché lo sono π, i e π_X.

Ora proviamo (b). Sia $j : Y \to \tilde{S}$ un morfismo canonico relativo a Q e P_Y il punto chiuso di Y. Poiché Q appartiene al divisore eccezionale di $\tilde{S}$, $\pi_*(Q) \succeq \pi(Q) = P$, ed esiste allora un morfismo $f : Y \to X$ tale che $\pi \circ j = i \circ f$. Si ha poi $f^{-1}\mathcal{I}_{P_X} \cdot \mathcal{O}_Y = f^{-1}(i^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_X) \cdot \mathcal{O}_Y = (i \circ f)^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_Y = (\pi \circ j)^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_Y = j^{-1}(\pi^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}) \cdot \mathcal{O}_Y$, e poiché $\pi^{-1}\mathcal{I}_P \cdot \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ è invertibile, otteniamo che $f^{-1}\mathcal{I}_{P_X} \cdot \mathcal{O}_Y$ è invertibile. Dunque esiste, per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.14], un unico morfismo $g : Y \to \tilde{X}$ tale che $f = \pi_X \circ g$, e sia $Q_X = g(P_Y)$ (che è un punto chiuso e un punto infinitamente vicino di $\tilde{X}$, perché questo è regolare, e per il lemma 3.15). Poiché abbiamo i punti $\pi_*(Q) = (\pi \circ j)_*(P_Y) = (i \circ \pi_X \circ g)_*(P_Y)$ e P e i morfismi f e g, siamo nella situazione del lemma 3.28. Si ha allora $(i \circ \pi_X)_*(Q_X) \vdash P$. Se dimostriamo che $(i \circ \pi_X)_*(Q_X) = \pi_*(Q)$, abbiamo dimostrato (b).

Poiché $\pi \circ \tilde{i} = i \circ \pi_X$, si ha $(i \circ \pi_X)_*(Q_X) = \pi_*(\tilde{i}_*(Q_X))$, e quindi, per dimostrare che questo è uguale a $\pi_*(Q)$ ci basta dimostrare che $\tilde{i}_*(Q_X) = Q$.

Innanzitutto $\pi \circ j = i \circ f = i \circ \pi_X \circ g = \pi \circ (\tilde{i} \circ g)$, e per la proprietà universale dello scoppiamento ([Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.14]) è unico il morfismo che composto con π dia $\pi \circ j = \pi \circ (\tilde{i} \circ g)$, perciò $j = \tilde{i} \circ g$. Ma allora $Q = j_*(P_Y) = \tilde{i}_*(g_*(P_Y)) \succeq \tilde{i}_*(g(P_Y)) = \tilde{i}_*(Q_X)$, e d'altra parte $\tilde{i}_*(Q_X) \succeq \tilde{i}(g(P_Y)) = j(P_Y) = Q$ (j è per definizione un morfismo canonico relativo a Q). Dunque $\tilde{i}_*(Q_X) = Q$, come volevamo.

Proviamo (c). Sia $j' : Y' \to S$ una inclusione di Q', $P_{Y'}$ il punto chiuso di Y'. Poiché $Q' \succ P$, per la proposizione 3.27, esistono un morfismo $f' : Y' \to X$ tale che $j' = i \circ f'$ e un morfismo $g' : Y' \to \tilde{X}$ tale che $f' = \pi_X \circ g'$. Poiché j' fattorizza per i' e per il lemma 3.15, si deve avere $j'(P_{Y'}) = P$. Posto poi $Q'_X = g'(P_{Y'})$, per il lemma 3.15, $Q := \tilde{i}(Q'_X)$ è un punto chiuso e infinitamente vicino di $\tilde{S}$, che appartiene al divisore eccezionale perché $\pi(Q) = \pi(\tilde{i}(g'(P_{Y'})) = i(\pi_X(g'(P_{Y'})) = j'(P_{Y'}) = P$. Per la parte (b), si ha $P \dashv \pi_*(Q)$, inoltre (tenendo presente la proposizione 3.25) si ha $\pi_*(Q) = \pi_*(\tilde{i}(g'(P_{Y'}))) \preceq \pi_*(\tilde{i}_*(g'_*(P_{Y'})) = (\pi \circ \tilde{i} \circ g')_*(P_{Y'}) = (i \circ \pi_X \circ g')_*(P_{Y'}) = j_*(P_{Y'}) = Q'$. Dunque $P \dashv \pi_*(Q) \preceq Q'$; ma essendo $P \dashv Q'$ questo implica $Q' = \pi_*(Q)$. $\square$

Proposizione 3.32. *Sia S regolare e sia P un punto infinitamente vicino di S. Allora esiste uno schema S' e un punto chiuso P' di S' tali che*

(I) *esiste un morfismo $\pi' : S' \to S$, che sia l'identitá di S o una composizione di morfismi di scoppiamento lungo punti chiusi;*

(II) $P = \pi'_*(P')$.

Dimostrazione. Sia $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, e sia $P_0 = i(P_X)$, che è un punto chiuso e infinitamente vicino di S, indipendente da i, per il lemma 3.15 e per il fatto che S è regolare. Esiste allora un'unica sequenza di punti infinitamente vicini di S tale che $P_0 \dashv P_1 \dashv \ldots \dashv P_n = P$. Facciamo la dimostrazione per induzione su n.

Per $n = 0$, si ha $P_0 = P$, dunque P è un punto chiuso di S. Basta porre $S' = S$, $P' = P$, $\pi' = \mathrm{id}_S$, e osservare che $(\mathrm{id}_S)_*(P) = P$ per il corollario 2.16.

Sia $n > 0$ e sia $P_0 \dashv P_1 \dashv \ldots \dashv P_n = P$ la sequenza di punti infinitamente vicini. In particolare, $P_0 \dashv P_1 \preceq P$. Sia $\pi : \tilde{S} \to S$ il morfismo di scoppiamento di S lungo P_0. Per la proposizione 3.31c esiste un punto $Q_0 \in \tilde{S}$ tale che $P_1 = \pi_*(Q_0)$. Se $i' : X' \to \tilde{S}$ è un morfismo canonico relativo a Q_0, allora $\pi \circ i'$ è un'inclusione di P_1, e poiché $P_1 \preceq P$, i fattorizza tramite $\pi \circ i'$, cioè $i = \pi \circ i' \circ f$ per un certo $f : X \to X'$, che è birazionale perché lo sono i, i' e π. Allora $i' \circ f$ è una inclusione di un punto infinitamente vicino Q di $\tilde{S}$, tale che $P = \pi_*(Q)$, e inoltre $Q \succeq Q_0$ perché esiste f. Esiste allora un'unica sequenza $Q_0 \dashv \cdots \dashv Q_m = Q$, e dunque, applicando π_*, otteniamo la sequenza $P_1 = \pi_*(Q_0) \dashv \cdots \dashv \pi_*(Q_m) = P$, ma per l'unicità dobbiamo avere che tale sequenza coincide con $P_1 \vdash \cdots \vdash P_n = P$, dunque $m = n - 1$. Applicando l'ipotesi di induzione, esiste una superficie S' un punto chiuso P' di S' e un morfismo $\pi'' : S' \to \tilde{S}$, tali che π'' sia l'identità di $\tilde{S}$ o una composizione di morfismi di scoppiamenti lungo punti, e $\pi''_*(P') = Q$. Ponendo $\pi' = \pi \circ \pi''$, e osservando che $\pi'_*(P') = \pi_*(\pi''_*(P')) = \pi_*(Q) = P$, otteniamo l'asserto. □

Riteniamo che le proposizioni 3.31 e 3.32, insieme all'esempio 3.6, illustrino abbastanza chiaramente la compatibilità delle definizioni 1.1 e 3.2.

Considerazioni conclusive.

Per schemi regolari, la proposizione 3.29 e il corollario 3.30 danno molte informazioni sulla struttura della relazione $\succeq$. Il corollario 3.30 non si può applicare a schemi non regolari, quindi potrebbero esistere infiniti punti precedenti un dato punto infinitamente vicino ad un S non regolare, e tali punti potrebbero non essere totalmente ordinati. Otterremmo maggiori risultati per schemi non regolari, indebolendo le ipotesi del lemma 3.26, per esempio supponendo solo che A sia integralmente chiuso. In effetti questa supposizione è confortata dall'osservazione 3.17, e dal fatto che le desingolarizzazioni di superfici si possono ottenere per normalizzazione e scoppiamenti lungo punti, come si può evincere da [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 3, osservazione 3.8.1] (cfr. anche [Zariski, capitolo I, pag. 23]): sono qui riportate varie notizie storiche, riguardanti la risoluzione delle singolarità, e in particolare i contributi di Zariski e Abhyankar. Notiamo che è stato possibile mantenersi ad un tale livello di generalità, prescindendo dall'ipotesi che S sia di tipo finito su di un campo, proprio grazie ai risultati di Zariski (cfr. lemma 2.30) e Abhyankar (cfr. lemma 3.26) (*). In effetti, molti risultati di tali autori riguardano il problema della desingolarizzazione delle varietà, da un punto di vista "aritmetico" (cfr. [Zariski2, introduzione]) e più generale possibile (cfr. [Zariski3, introduzione]).

Abbiamo dunque ritenuto di un certo interesse (quantomeno storico) sviluppare la nostra teoria al livello di generalità consentito dai citati risultati (invece di utilizzare quelli più elementari sulle superfici su un campo); inoltre tale impostazione, crediamo, contribuisce a illustrarne il significato geometrico.

(*) Come ulteriore notizia, rileviamo che in [Zariski-Samuel, appendice 2], sono ripresi alcuni dei risultati di [Abhyankar] (cfr. [ibid., nota a pag. 330]), e vengono sviluppati i risultati di [Zariski-Samuel, appendice 1], che abbiamo utilizzato nella dimostrazione del lemma 2.30.

CAPITOLO IV

Punti infinitamente vicini e divisori

L'equazione locale di un divisore in un punto infinitamente vicino.

Proposizione 4.1. *Sia S regolare, sia $i : X \to S$ una inclusione di un punto infinitamente vicino P di S, sia P_X il punto chiuso di X e $P_0 = i(P_X)$. Allora la restrizione $i|_{i^{-1}(S-P_0)}$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Poiché P_0 è un punto chiuso e infinitamente vicino di S (cfr. lemma 3.15), esiste un'unica catena $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n = P$ (cfr. proposizione 3.29); possiamo allora ragionare per induzione su n.

Per $n = 0$, i è un morfismo canonico relativo a P_0, e dunque è iniettivo (cfr. proposizione 2.8), e così ogni sua restrizione.

Sia $n \geq 1$. Sia $i_0 : X_0 \to S$ un morfismo canonico relativo a P_0, P_{X_0} il punto chiuso di X_0 e $\pi : \tilde{X_0} \to X_0$ il morfismo di scoppiamento di X_0 lungo P_{X_0}. Per la proposizione 3.27, esiste un morfismo $f : X \to X_0$ tale che $i = i_0 \circ f$ e un morfismo $g : X \to \tilde{X_0}$ tale che $f = \pi \circ g$. Dunque $i|_{i^{-1}(S-P_0)} = i_0|_{i_0^{-1}(S-P_0)} \circ \pi|_{(i_0\circ\pi)^{-1}(S-P_0)} \circ g|_{i^{-1}(S-P_0)}$ (sono tutte restrizioni ad aperti, perché P_0 è chiuso): basta dimostrare che questi tre morfismi sono iniettivi. Poiché i_0 è un morfismo canonico, si ha subito che $i_0|_{i_0^{-1}(S-P_0)}$ è iniettivo, e inoltre che $(i_0 \circ \pi)^{-1}(S - P_0) = \pi^{-1}(X_0 - P_{X_0})$. Allora $\pi|_{(i_0\circ\pi)^{-1}(S-P_0)} = \pi|_{\pi^{-1}(X_0-P_{X_0})}$ è iniettivo per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.13b].

Poiché g è birazionale (in quanto lo sono i, i_0, e π), è un'inclusione di un punto infinitamente vicino Q di $\tilde{X_0}$. Se $Q_0 = g(P_X)$, come prima si ha un'unica catena $Q_0 \vdash Q_1 \vdash \cdots \vdash Q$, la cui lunghezza è $n-1$, a causa dell'unicità di $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n$, dato che si ha $(i_0 \circ \pi)_*(Q_0) \vdash \cdots \vdash (i_0 \circ \pi)_*(Q) = P$, e $P_0 \dashv (i_0 \circ \pi)_*(Q_0)$ per il lemma 3.28. Dunque per l'induzione $g|_{X-P_X}$ è iniettivo, e poiché $X - P_X \supseteq i^{-1}(S - P_0)$ (dato che $i(P_X) = P_0$), $g|_{i^{-1}(S-P_0)}$ è iniettivo. □

Proposizione 4.2. *Sia S regolare e separato, D un divisore primo di S, η_D il suo punto generico, e sia $i : X \to S$ una inclusione di un punto infinitamente vicino. Allora $\overline{i^{-1}(\eta_D)}$ o è vuoto, o è un divisore primo di X.*

Dimostrazione. Poiché i è birazionale, manda il punto generico di X nel punto generico di S, inoltre, per il lemma 3.15, i manda il punto chiuso in un punto chiuso con anello locale di dimensione due. Per la proposizione 4.1, $i^{-1}(\eta_D)$, se non è vuoto, è costituito da un unico punto di X, che, per quanto abbiamo appena detto, non può essere né il punto generico, né il punto chiuso, e dunque, dato che X è locale, integro e di dimensione due, $\overline{i^{-1}(\eta_D)}$ ha codimensione uno, ed essendo irriducibile perché chiusura di un punto, è un divisore primo. □

Definizione 4.3. Sia S regolare e separato, e sia $i : X \to S$ un morfismo birazionale tale che la controimmagine del punto generico di un divisore primo è costituita da al più un punto (in particolare una inclusione di un punto infinitamente vicino, o un morfismo di scoppiamento). Se D è un divisore primo di S, allora diremo *trasformato stretto* di D su X, il divisore nullo se $\overline{i^{-1}(\eta_D)} = \emptyset$, altrimenti il divisore primo $\overline{i^{-1}(\eta_D)}$. Se $D = \sum_\alpha n_\alpha Y_\alpha$ è un qualsiasi divisore, con gli Y_α divisori primi, allora diremo *trasformato stretto* di D su X il divisore $\sum_\alpha n_\alpha \tilde{Y}_\alpha$, dove gli $\tilde{Y}_\alpha$ sono i trasformati stretti degli Y_α.

Convenzione 4.4. *Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A allora poniamo $\mathfrak{a}^0 = A$. Se $f \in A$ poniamo $f^0 = 1$.*

Osservazione 4.5. Se $v : K - \{0\} \to \mathbf{Z}$ è una valutazione discreta del campo K, in base alla convenzione 4.4, la relazione $v(f^n) = nv(f)$ vale anche per $n = 0$.

Stabiliamo ora, per comodità del lettore, un lemma elementare (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 6, proposizione 6.2])

Lemma 4.6. *Sia X uno schema locale regolare, P_X il suo punto chiuso. Allora valgono i seguenti fatti.*

(a) *Se Y è un divisore primo di X, esiste un elemento $f \in \mathcal{O}_{P_X}$, non invertibile, tale che $Y = (f)$;*

(b) *se $D = \sum_\alpha n_\alpha D_\alpha$ è un qualsiasi divisore, con i D_α divisori non necessariamente primi, e $f_\alpha \in K(X) - \{0\}$ sono tali che $D_\alpha = (f_\alpha)$, allora $D = (\prod_\alpha f_\alpha^{n_\alpha})$;*

(c) *se D è un divisore di X, esiste un elemento $f \in K(X) - \{0\}$ tale che $D = (f)$;*

(d) *se f e g sono funzioni razionali non nulle su X, cioè elementi di $K(X) - \{0\}$, allora $(f) = (g)$ se e solo se f/g è un elemento invertibile di $\mathcal{O}_{P_X}$.*

Dimostrazione. Sia $\{Y_\beta\}$ l'insieme dei divisori primi di X, e siano η_{Y_β} i punti generici degli Y_β. Gli $\mathcal{O}_{X,\eta_{Y_\beta}}$, considerati come sottoanelli di $K(X)$, sono anelli di valutazione discreta, e sia v_{Y_β} tale valutazione. Il divisore (f) è dato da $\sum_\beta v_{Y_\beta}(f) Y_\beta$.

Dimostriamo (a). Sia η_Y il punto generico di Y. Sappiamo che $\rho_{X\eta_Y}$ è un morfismo di localizzazione rispetto all'ideale primo $\mathfrak{p} = \omega_X(\eta_Y)$ di $\mathcal{O}_X(X)$, dove ω_X è l'isomorfismo naturale $X \xrightarrow{\sim}$ Spec $\mathcal{O}_X(X)$. Considerando gli anelli locali dei punti di X come sottoanelli di $K(X)$, e tenendo conto che, essendo X locale, $\mathcal{O}_X(X)$ si può identificare con $\mathcal{O}_{P_X}$, si ha che $\mathcal{O}_{P_X} \subseteq \mathcal{O}_{\eta_Y} \subseteq K(X)$ e che l'inclusione di $\mathcal{O}_{P_X}$ in $\mathcal{O}_{\eta_Y}$ è un morfismo di localizzazione rispetto a $\mathfrak{p}$. Dato che Y è un divisore, $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di altezza uno, e poiché $\mathcal{O}_{P_X}$, essendo locale regolare, è un dominio a fattorizzazione unica, si ha che $\mathfrak{p}$ è un ideale principale. Infatti, poiché è non nullo contiene un elemento non nullo g, poiché è primo, contiene un fattore irriducibile f di g, e poiché ha altezza uno e contiene l'ideale, necessariamente primo, generato da f, deve essere generato da f. Dunque l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{\eta_Y}$, essendo questo una localizzazione di $\mathcal{O}_{P_X}$ in $\mathfrak{p}$, è generato da f, dunque $v_Y(f) = 1$. Se ora Y' è un altro divisore primo di X, ed $\eta_{Y'}$ è il suo punto generico $\mathfrak{p}' = \omega_X(\eta_{Y'})$ è distinto da $\mathfrak{p}$, e ragionando come per $\mathfrak{p}$ si ottiene che $\mathfrak{p}'$ è generato da un $f' \neq f$. Dunque $f \notin \mathfrak{p}'$, perciò è invertibile in $\mathcal{O}_{\eta_{Y'}}$, e dunque $v_{Y'}(f) = 0$. In definitiva, $v_{Y_\beta}(f) = 1$ se $Y_\beta = Y$, $v_{Y_\beta}(f) = 0$, se $Y_\beta \neq Y$. Dunque $(f) = Y$.

Per dimostrare (b), basta osservare che

$$\begin{aligned}(\textstyle\prod_\alpha f_\alpha^{n_\alpha}) = \sum_\beta v_{Y_\beta}(\prod_\alpha f_\alpha^{n_\alpha}) Y_\beta = \sum_\beta \sum_\alpha n_\alpha v_{Y_\beta}(f_\alpha) Y_\beta = \\ = \textstyle\sum_\alpha \sum_\beta n_\alpha v_{Y_\beta}(f_\alpha) Y_\beta = \sum_\alpha n_\alpha \sum_\beta v_{Y_\beta}(f_\alpha) Y_\beta = \sum_\alpha n_\alpha (f_\alpha) = \sum_\alpha n_\alpha D_\alpha = D\end{aligned} \quad .$$

Da (a) e (b) segue subito (c), poiché ogni divisore è combinazione di divisori primi.

Dimostriamo (d). Se f/g è invertibile in $\mathcal{O}_{P_X}$, è invertibile in ogni $\mathcal{O}_{\eta_{Y_\beta}}$, dunque $v_{Y_\beta}(f) = v_{Y_\beta}(g)$ per ogni β, perciò $(f) = (g)$. Se viceversa $(f) = (g)$, allora f/g è invertibile in ogni $\mathcal{O}_{\eta_{Y_\beta}}$, dunque sia f/g che g/f appartengono a $\mathcal{O}_{\eta_{Y_\beta}}$ per ogni β. Ma gli $\mathcal{O}_{\eta_{Y_\beta}}$ sono tutte e sole le localizzazioni (in $K(S)$) di $\mathcal{O}_{P_X}$ rispetto agli ideali primi di altezza uno, dunque f/g e g/f appartengono a $\mathcal{O}_{X,P_X}$, per [Matsumura, teorema 38, pag. 124]. □

Osservazione 4.7. È facile verificare che un isomorfismo $f : X \to X'$ di schemi noetheriani integri regolari, induce una biezione $\sum_\alpha n_\alpha Y_\alpha \mapsto \sum_\alpha n_\alpha f^{-1}(Y_\alpha)$, tra gli insiemi dei divisori di X' e di X, e che il corrispondente del divisore (g) di g su X è uguale al divisore $(f_\eta^\sharp(g))$ di $f_\eta^\sharp(g)$, dove η è il punto generico di X.

Definizione 4.8. Sia S regolare e separato, P un punto infinitamente vicino di S, D un divisore di S. Se $i : X \to S$ è una inclusione di P, η_X è il punto generico di X, $\tilde{D}$ è il trasformato stretto di D su X, ed $f \in K(X)$ è tale che $\tilde{D} = (f)$, allora $(i^\sharp_{\eta_X})^{-1}(f) \in K(S)$ si dice *equazione locale* di D in P.

La definizione 4.8 è ben posta, cioè è indipendente dalla scelta di i, per definizione di equivalenza di inclusioni di punti infinitamente vicini, tenendo presente l'osservazione 4.7.

Osservazione 4.9. Per il lemma 4.6c, esiste sempre un'equazione locale di un divisore in un punto; inoltre, per il lemma 4.6d, dato che il morfismo $i^\sharp_{\eta_X}$ indotto da un'inclusione di un punto infinitamente vicino $i : X \to S$ è un isomorfismo, tali equazioni locali differiscono per elementi invertibili di $\mathcal{O}_{S,P}$, e il prodotto di un'equazione locale per un tale elemento invertibile è ancora un'equazione locale dello stesso divisore. Si può facilmente verificare che la nostra definizione è in accordo con la terminologia di [Hartshorne], nel caso di punti ordinari di uno schema S (cfr. per esempio [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 3, definizione a pag. 388], dove si parla di equazione locale di un divisore di Cartier, cfr. quindi [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 6, dimostrazione della proposizione 6.11]).

La molteplicità di un divisore in un punto infinitamente vicino.

Proposizione 4.10. *Sia S regolare e separato, P un punto infinitamente vicino di S, ed $\mathfrak{m}_P$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{S,P}$. Allora esiste un'unica valutazione discreta* ord_P *di $K(S)$ tale che* $\mathrm{ord}_P(f) = \max\{n : f \in \mathfrak{m}_P^n\}$*, per ogni $f \in \mathcal{O}_{S,P} - \{0\}$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{O}_{S,P}$ è un dominio di integrità noetheriano, $\cap_n \mathfrak{m}_P^n = \{0\}$ (cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo 10, corollario 10.18]); dunque, se $f \in \mathcal{O}_{S,P} - \{0\}$, $\max\{n : f \in \mathfrak{m}_P^n\}$ è finito. Possiamo allora porre, per ogni $f \in \mathcal{O}_{S,P} - \{0\}$, $\mathrm{ord}_P(f) = \max\{n : f \in \mathfrak{m}_P^n\}$, e incominciamo a vedere che, almeno su $\mathcal{O}_{S,P} - \{0\}$, valgono le proprietà delle valutazioni, cioè $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$, e $\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$.

Poiché $f \in \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(f)}$, e $g \in \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(g)}$, si ha $fg \in \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(f)} \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(g)} = \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(f)+\mathrm{ord}_P(g)}$, dunque $\mathrm{ord}_P(fg) \geq \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$. Per provare che $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$

basta allora dimostrare che $fg \notin \mathfrak{m}_P^{\mathrm{ord}_P(f)+\mathrm{ord}_P(g)+1}$, ma questo discende subito da [Atiyah-Macdonald, capitolo 11, teorema 11.22]. Sia poi $n = \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$; allora $f, g \in \mathfrak{m}_P^n$, e dunque $f + g \in \mathfrak{m}_P^n$, da cui $\mathrm{ord}_P(f + g) \geq n$.

A questo punto c'è un unico modo per estendere ord_P a tutto $K(S) - \{0\}$, in modo che siano soddisfatte le due condizioni appena enunciate. Se infatti $x \in K(S) - \{0\}$, dato che $K(S)$ è campo dei quozienti di $\mathcal{O}_{S,P}$, si ha $x = f/g$, con $f, g \in \mathcal{O}_{S,P}$, e allora dato che $f = gx$, deve essere $\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(g) + \mathrm{ord}_P(x)$, da cui $\mathrm{ord}_P(x) = \mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g)$. Ma poiché $f/g = f'/g'$ equivale a $fg' = f'g$ si ha, per quanto visto prima, $\mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g') = \mathrm{ord}_P(f') + \mathrm{ord}_P(g)$ da cui $\mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g) = \mathrm{ord}_P(f') - \mathrm{ord}_P(g')$. Dunque possiamo definire per ogni elemento f/g di $K(S) - \{0\}$, $\mathrm{ord}_P(f/g) = \mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g)$ (in sostanza abbiamo richiamato la proprietà universale del gruppo moltiplicativo $K(S) - \{0\}$, simmetrizzazione del semigruppo moltiplicativo $\mathcal{O}_{S,P} - \{0\}$).

Ci rimane solo da dimostrare che $\mathrm{ord}_P(f/g + f'/g') \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f/g), \mathrm{ord}_P(f'/g')\}$. Si ha subito $\mathrm{ord}_P(f/g + f'/g') = \mathrm{ord}_P((fg' + f'g)/gg') = \mathrm{ord}_P(fg' + f'g) - \mathrm{ord}_P(g) - \mathrm{ord}_P(g') \geq \min\{\mathrm{ord}_P(fg'), \mathrm{ord}_P(f'g)\} - \mathrm{ord}_P(g) - \mathrm{ord}_P(g') = \min\{\mathrm{ord}_P(fg') - \mathrm{ord}_P(g) - \mathrm{ord}_P(g'), \mathrm{ord}_P(f'g) - \mathrm{ord}_P(g) - \mathrm{ord}_P(g')\} = \min\{\mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g), \mathrm{ord}_P(f') - \mathrm{ord}_P(g')\}$.
□

Stabiliamo dunque la seguente definizione (cfr. [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman]).

Definizione 4.11. Sia S regolare e separato, e P un punto infinitamente vicino di S. La valutazione ord_P, determinata dalla proposizione 4.10 si dice *valutazione d'ordine* in P.

Osservazione 4.12. Se D è un divisore di S, con S regolare e separato, e se P è un punto infinitamente vicino di S, allora per l'osservazione 4.9 due equazioni locali di D in P hanno lo stesso ord_P-valore.

Definizione 4.13. Sia S regolare e separato, D un divisore di S, P un punto infinitamente vicino di S. Allora si definisce *molteplicità* di D in P l'intero $\mu_P(D) := \mathrm{ord}_P(f)$, dove f è una qualsiasi equazione locale di D in P.

Proposizione 4.14. *Sia S regolare e separato, D_α dei divisori di S, e P un punto infinitamente vicino di S. Allora $\mu_P(\sum n_\alpha D_\alpha) = \sum n_\alpha \mu_P(D_\alpha)$.*

Dimostrazione. Sia $D = \sum n_\alpha D_\alpha$, $i : X \to S$ una inclusione di P, e sia, per ogni α, $\tilde{D}_\alpha$ il trasformato stretto di D_α su X, ed $f_\alpha \in K(X)$ tale che $\tilde{D}_\alpha = (f_\alpha)$ (cfr. lemma 4.6c). Per definizione di trasformato stretto, si ha subito che $\tilde{D} = \sum n_\alpha \tilde{D}_\alpha$, e per il lemma 4.6b, otteniamo $\tilde{D} = (\prod f_\alpha^{n_\alpha})$. Dunque, detto η_X il punto generico di X, si ha $\mu_P(D) = \mathrm{ord}_P((i^\sharp_{\eta_X})^{-1}(\prod f_\alpha^{n_\alpha})) = \sum n_\alpha \mathrm{ord}_P((i^\sharp_{\eta_X})^{-1}(f_\alpha)) = \sum n_\alpha \mu_P(D_\alpha)$. □

Proposizione 4.15. *Sia S regolare e separato, D un divisore effettivo di S, P un punto infinitamente vicino di S, $i : X \to S$ un'inclusione di P. Allora $\mu_P(D) \geq 0$ e $\mu_P(D) = 0$ se e solo se il trasformato stretto $\tilde{D}$ di D su X è nullo.*

Dimostrazione. Poiché un divisore effettivo è combinazione a coefficienti non negativi di divisori primi, per la proposizione 4.14 possiamo supporre che D sia un divisore primo. Detti P_X ed η_X rispettivamente il punto chiuso e il punto generico di X, e presa un'equazione locale f di D, questa è immagine tramite $(i^\sharp_{\eta_X})^{-1}$ di un elemento di $\mathcal{O}_{X,P_X}$, che per il lemma 4.6a, è invertibile se e solo se $\tilde{D}$ è nullo. Quindi, dato che chiaramente un elemento f di $\mathcal{O}_{S,P}$ è invertibile se e solo se $\mathrm{ord}_P(f) = 0$, si ha $\mu_P(D) = \mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ e $\mu_P(D) = 0$ se e solo se $\tilde{D}$ è nullo. □

Proposizione 4.16. *Sia S regolare e separato, D un divisore effettivo, e P un punto chiuso (e infinitamente vicino) di S. Allora, considerando D come sottoschema chiuso di S, si ha*

(a) $P \in D$ *se e solo se* $\mu_P(D) > 0$*;*

(b) P *è un punto regolare di* D *se e solo se* $\mu_P(D) = 1$.

Dimostrazione. Proviamo (a). Se D è nullo l'asserto è ovvio. Se $D = \sum n_\alpha Y_\alpha$, con gli Y_α divisori primi e $n_\alpha > 0$, allora il sostegno di D è l'unione degli Y_α. Detto, per ogni α, η_α il punto generico di Y_α, allora $P \in D$ se e solo se $P \in Y_{\overline{\alpha}} = \overline{\{\eta_{\overline{\alpha}}\}}$ per un $\overline{\alpha}$, cioè se e solo se $\eta_{\overline{\alpha}}$ è generizzazione di P. Ma un'inclusione di P, cioè un morfismo canonico relativo a P, ha per immagine le generizzazioni di P, dunque $P \in D$ se e solo se il trasformato stretto di D è non nullo, e questo, per la proposizione 4.15, è vero se e solo se $\mu_P(D) > 0$.

Proviamo (b). Dalle definizioni si ottiene

$$\mathcal{O}_{D,P} \cong \frac{\mathcal{O}_{S,P}}{f\mathcal{O}_{S,P}},$$

dove f è un'equazione locale di D e $f\mathcal{O}_{S,P}$ è l'ideale generato da f in $\mathcal{O}_{S,P}$. Detto $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{S,P}$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/f\mathcal{O}_{S,P}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{S,P}/f\mathcal{O}_{S,P}$ e k il campo residuo di $\mathcal{O}_{S,P}$ (e quindi anche di $\mathcal{O}_{S,P}/f\mathcal{O}_{S,P}$), dato che D ha dimensione uno, ci basta dimostrare che $\dim_k \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 = 1$ se e solo se $\mu_P(f) = 1$. Ma $\mu_P(f) = 1$ se e solo se $f \notin \mathfrak{m}^2$, e il nucleo dell'omomorfismo suriettivo di k-spazi vettoriali $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2$ è generato dalla classe di f. Dunque $\mu_P(f) = 1$ se e solo se tale nucleo è non nullo, inoltre il nucleo ha dimensione al più uno. Dato che $\mathcal{O}_{S,P}$ è regolare di dimensione due, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ha dimensione due, e quindi il nucleo è non nullo se e solo se $\dim_k \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 = 1$. □

Definizione 4.17. Sia S regolare e separato, D un divisore effettivo di S, e P un punto infinitamente vicino di S. Allora diremo che:

— P *appartiene* a D, e D *passa* per P ($P \in D$), se $\mu_P(D) > 0$;

— P è un *punto semplice*, o *regolare*, di D, e D è *regolare* in P, se $\mu_P(D) = 1$;

— P è un *punto multiplo*, o *singolare* di D, e D è *singolare* in P, se $\mu_P(D) \geq 2$.

La proposizione 4.16 mostra che la definizione 4.17 è in accordo con le solite nozioni di appartenenza e di regolarità, nel caso P sia un punto chiuso di S.

Proposizione 4.18. *Sia S regolare e separato, D un divisore effettivo di S e P, Q due punti infinitamente vicini di S, tali che $P \preceq Q$. Allora se Q appartiene a D, anche P appartiene a D.*

Dimostrazione. Basta osservare che un'inclusione di Q fattorizza per un'inclusione di P, e applicare la proposizione 4.15. □

Proposizione 4.19. *Sia S regolare e separato, C e D divisori effettivi di S, senza componenti comuni, P un punto infinitamente vicino di S, f e g equazioni locali rispettivamente di C e D in P, e sia $\mathfrak{a}$ l'ideale di $\mathcal{O}_P$ generato da f e g. Allora la lunghezza dell'$\mathcal{O}_P$-modulo $\mathcal{O}_P/\mathfrak{a}$ è finita, e non dipende dalla scelta di f e g.*

Dimostrazione. Detta $i : X \to S$ un'inclusione di P, poiché C e D non hanno componenti comuni, lo stesso vale per i trasformati stretti su X, e dunque gli elementi di $K(X)$ corrispondenti ad f e g non sono inclusi in nessun ideale primo di altezza uno. Dunque $\mathcal{O}_P/\mathfrak{a}$ ha dimensione zero, perciò è artiniano (cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo 8, proposizione 8.5]), dunque ha lunghezza finita (cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo 6, proposizione 6.8 e discorso successivo]).

Poiché equazioni locali dello stesso divisore differiscono per elementi invertibili di $\mathcal{O}_P$ (cfr. osservazione 4.9), $\mathfrak{a}$ non dipende dalla scelta di f e g. □

Definizione 4.20. Sia S regolare e separato, C e D divisori effettivi di S, senza componenti comuni, P un punto infinitamente vicino di S, f e g equazioni locali rispettivamente di C e D in P, e sia $\mathfrak{a}$ l'ideale di $\mathcal{O}_P$ generato da f e g. Allora la lunghezza dell'$\mathcal{O}_P$-modulo $\mathcal{O}_P/\mathfrak{a}$ sarà detta *molteplicità di intersezione* di C e D in P, e sarà indicata con $(C \cdot D)_P$.

Nel caso dei punti chiusi e infinitamente vicini, la nostra definizione è chiaramente in accordo con quella di [Hartshorne, capitolo I, paragrafo 5, esercizio 5.4] (cfr. anche [Hartshorne, capitolo V, paragrafo 1, pag. 360]).

Proposizione 4.21. *Sia S regolare e separato, C e D divisori effettivi di S, senza componenti comuni, P un punto infinitamente vicino di S. Allora*

$$(C \cdot D)_P = \mu_P(C)\mu_P(D) + \sum_{Q \vdash P} (C \cdot D)_Q.$$

Dimostrazione. Sia $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X in P_X. Posto $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,P_X}$ e detto $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale, il morfismo π corrisponde tramite isomorfismi al morfismo $\operatorname{Proj} G \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$, dove $G = \sum_n \mathfrak{m}^n$; gli elementi omogenei di G saranno indicati con coppie del tipo (x, n), dove $x \in \mathfrak{m}^n$ ed n è il grado. Detti $\tilde{C}$ e $\tilde{D}$ i trasformati stretti di C e D su X, e presi $f, g \in \mathcal{O} \subset K(X)$ tali che $\tilde{C} = (f)$, $\tilde{D} = (g)$, allora $(C \cdot D)_P$ è la lunghezza di $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$, dove $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da f e g. I trasformati stretti di C e D su $\tilde{X}$ corrispondono invece agli ideali generati rispettivamente da (f, μ_1) e (g, μ_2), dove $\mu_1 = \operatorname{ord}_P(f)$, $\mu_2 = \operatorname{ord}_P(g)$. Detto $\tilde{\mathfrak{a}}$ l'ideale generato da (f, μ_1) e (g, μ_2) in G, si dimostra in maniera abbastanza standard (cfr. [Hartshorne, capitolo 1, paragrafo 7]) che, dato che i punti immediatamente successivi a P corrispondono a punti chiusi di $\tilde{X}$, la lunghezza come $\mathcal{O}$-modulo della componente di grado n, è costante per $n >> 0$ ed uguale a $\sum_{Q \vdash P} (C \cdot D)_Q$.

Consideriamo ora l'algebra graduata $A = \sum_n \mathcal{O} \supset G$ e l'ideale $\mathfrak{a}'$, generato anch'esso da (f, μ_1) e (g, μ_2). Chiaramente, per $n >> 0$ le componenti omogenee di $\mathfrak{a}'$ sono tutte isomorfe, come $\mathcal{O}$-moduli, ad $\mathfrak{a}$, dunque $(C \cdot D)_P$ è la lunghezza della componente di grado n di $A/\mathfrak{a}'$, per $n >> 0$ (precisamente per n maggiore o uguale al massimo tra μ_1 e μ_2).

Consideriamo ora la successione esatta di $G-$moduli

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow A/G \longrightarrow 0.$$

Tensorizzando per $G/\tilde{\mathfrak{a}}$ otteniamo la successione esatta

$$(*)\ \ 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^G(A, G/\tilde{\mathfrak{a}}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}) \longrightarrow G/\tilde{\mathfrak{a}} \longrightarrow A/\mathfrak{a}' \longrightarrow (A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)) \longrightarrow 0.$$

Vediamo chi sono i due Tor_1. Bisogna tensorizzare una risoluzione di $G/\tilde{\mathfrak{a}}$, che, dato che $\mathcal{O}$ è un dominio a fattorizzazione unica, ci è data dal complesso di Koszul $K((f,\mu_1),(g,\mu_2))$ relativo a (f,μ_1) e (g,μ_2):

$$0 \longrightarrow G(-\mu_1-\mu_2) \longrightarrow G(-\mu_1) \oplus G(-\mu_2) \longrightarrow G \longrightarrow G/\tilde{\mathfrak{a}} \longrightarrow 0,$$

dove le parentesi indicano il "twisting", che è stato operato per rendere gli omomorfismi anche omomorfismi di G-moduli graduati, fatto che ci sarà utile in seguito. Otteniamo allora i complessi

$$0 \longrightarrow A(-\mu_1-\mu_2) \longrightarrow A(-\mu_1) \oplus A(-\mu_2) \longrightarrow A \longrightarrow (A)/(\mathfrak{a}(A)) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A/G(-\mu_1-\mu_2) \longrightarrow A/G(-\mu_1) \oplus A/G(-\mu_2) \longrightarrow A/G \longrightarrow (A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)) \longrightarrow 0,$$

diciamoli rispettivamente K_1 e K_2. Dunque $\mathrm{Tor}_1^G(A, G/\tilde{\mathfrak{a}}) = \mathrm{H}_1(K_1)$ e $\mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}) = \mathrm{H}_1(K_2)$.

Ora, per come è definito A, K_1 è chiaramente esatto, quindi $\mathrm{Tor}_1^G(A, G/\tilde{\mathfrak{a}}) = 0$. Dalla successione $(*)$ si ha per ogni n,

$$\mathrm{lenght}(A/\mathfrak{a}')_n = \mathrm{lenght}(G/\tilde{\mathfrak{a}})_n + \mathrm{lenght}((A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)))_n - \mathrm{lenght}(\mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}))_n$$

(dove il pedice indica la componente di grado n). Poiché abbiamo visto che per $n >> 0$ si ha $\mathrm{lenght}(G/\tilde{\mathfrak{a}})_n = \sum_{Q \vdash P}(C \cdot D)_Q$ e $\mathrm{lenght}(A/\mathfrak{a}')_n = (C \cdot G)_P$, ci basta dimostrare che $\mathrm{lenght}((A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)))_n - \mathrm{lenght}(\mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}))_n = \mu_1\mu_2$ per $n >> 0$. Ma questo si ricava dal complesso K_2. Infatti $\mathrm{H}_2(K_2)$ è nullo, dunque

$$\mathrm{lenght}((A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)))_n - \mathrm{lenght}(\mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}))_n =$$

$$= \mathrm{lenght}(A/G)_n + \mathrm{lenght}(A/G(-\mu_1-\mu_2))_n - \mathrm{lenght}(A/G(-\mu_1) \oplus A/G(-\mu_2))_n.$$

Poiché $\mathcal{O}$ è locale regolare, la lunghezza della componente di grado n di A/G è $\binom{n+1}{2}$, e allora, per $n >> 0$ si ha

$$\mathrm{lenght}((A/G)/(\tilde{\mathfrak{a}}(A/G)))_n - \mathrm{lenght}(\mathrm{Tor}_1^G(A/G, G/\tilde{\mathfrak{a}}))_n =$$

$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1-\mu_1-\mu_2}{2} - \binom{n+1-\mu_1}{2} - \binom{n+1-\mu_2}{2} = \mu_1\mu_2.$$

□

Corollario 4.22. *Sia S regolare e separato, C e D divisori effettivi di S, senza componenti comuni, e sia P un punto infinitamente vicino di S. Allora i punti infinitamente vicini appartenenti sia a C che a D sono un insieme finito, e $(C \cdot D)_P = \sum_{Q \succeq P} \mu_Q(C)\mu_Q(D)$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $(C \cdot D)_P = 0$ se e solo se un'equazione locale di C o di D è invertibile, cioè uno dei due divisori non passa per P. Ragioniamo per induzione su $(C \cdot D)_P$. Se $(C \cdot D)_P = 0$ allora uno dei due divisori non passa per P, dunque non passa per ogni punto Q successivo a P (cfr. proposizione 4.18). Si ha allora $(C \cdot D)_Q = 0$ per ogni punto successivo a Q, e la tesi è banalmente verificata. Se $(C \cdot D)_P > 0$, allora tutti e due i divisori passano per P, dunque $\mu_P(C)\mu_P(D) > 0$, e per la proposizione 4.21, si ha $(C \cdot D)_P = \mu_P(C)\mu_P(D) + \sum_{Q \vdash P}(C \cdot D)_Q$. Dunque, per ogni $Q \vdash P$, si ha $(C \cdot D)_Q < (C \cdot D)_P$, per l'induzione, e visto che ogni punto strettamente seguente P segue un punto immediatamente successivo a P, allora si ha subito $(C \cdot D)_P = \sum_{Q \succeq P} \mu_Q(C)\mu_Q(D)$. Poiché tale somma, essendo $(C \cdot D)_P$ finito, deve essere finta, e per quanto osservato all'inizio si ha anche che i punti infinitamente vicini appartenenti sia a C che a D sono un insieme finito. □

La relazione di prossimità.

Lemma 4.23. *Sia S regolare e separato, P un punto infinitamente vicino di S, $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo P_X, $\eta_{\tilde{X}}$ il punto generico di $\tilde{X}$, $E = \pi^{-1}(P_X)$ il divisore eccezionale, ed infine η_E il punto generico di E. Allora $((i \circ \pi)^\sharp_{\eta_{\tilde{X}}})^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E})$ è l'anello di valutazione di* ord_P.

Dimostrazione. Sia η_X il punto generico di X, $A = \mathcal{O}_X(X)$ ed $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Poiché $\mathcal{O}_{S,P} = (i^\sharp_{\eta_X})^{-1}(\mathcal{O}_{X,P_X})$, ci basta provare che $(\pi^\sharp_{\eta_{\tilde{X}}})^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E})$ è l'anello di valutazione di ord_{P_X} (in $K(X)$). Dalla costruzione dello scoppiamento, dato che X è affine, segue che π corrisponde tramite isomorfismi al morfismo $\pi_A : \mathrm{Proj}\ G \to \mathrm{Spec}\ A$, dove G è la $A-$algebra graduata $\sum_n \mathfrak{m}^n$, ed η_E corrisponde all'estensione in G di $\mathfrak{m}$, che è un ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$; inoltre $G/\mathfrak{p}$ è l'anello graduato $G_\mathfrak{m}$, associato ad A (cfr. [Atiyah-Macdonald, capitolo 10]). Il punto generico di $\mathrm{Proj}\ G$ è l'ideale nullo (0), che corrisponde tramite π_A all'ideale nullo di A, che, se identifichiamo A con l'anello degli elementi di grado zero di G, è ancora (0). Dobbiamo dunque provare che $((\pi_A)^\sharp_{(0)})^{-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ G,\mathfrak{p}})$ è l'anello di valutazione di $\mathrm{ord}_\mathfrak{m}$ (infatti $\mathfrak{m}$ è il punto di $\mathrm{Spec}\ A$ corrispondente a P_X).

Ora, $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\ G,\mathfrak{p}} \cong G_{(\mathfrak{p})}$ (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 2, proposizione 2.5]), e $K(\mathrm{Spec}\ A) \cong A_{(0)}$: dalle definizioni, si ottiene che $((\pi_A)^\sharp_{(0)})^{-1}$ corrisponde tramite tali isomorfismi all'isomorfismo $\varphi : G_{((0))} \to A_{(0)}$ definito come segue. Se indichiamo gli elementi omogenei di G con (f,n) dove n è il grado ed $f \in \mathfrak{m}^n$, un elemento di $G_{((0))}$ è del tipo $(f,n)/(g,n)$, con $g \neq 0$, e allora $\varphi((f,n)/(g,n)) = f/g$. Inoltre $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A,\mathfrak{m}}$ corrisponde all'immagine naturale di A in $A_{(0)}$, dunque ord_{P_X} corrisponde alla valutazione ord di $A_{(0)}$ definita per ogni $f \in A$ da $\mathrm{ord}(f) = \max\{n : f \in \mathfrak{m}^n\}$. Dobbiamo dimostrare che l'anello di valutazione di ord è l'immagine di $G_{(\mathfrak{p})}$ tramite φ (identificando $G_{(\mathfrak{p})}$ con il corrispondente sottoanello di $G_{((0))}$).

Poiché $G_{(\mathfrak{p})}$ è costituito dagli elementi $x = (f,n)/(g,n)$ tali che $(g,n) \notin \mathfrak{p}$, e poiché $(g,n) \notin \mathfrak{p}$ equivale a $g \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, otteniamo che $\mathrm{ord}(g) = n$, mentre $\mathrm{ord}(f) \geq n$, da cui $\mathrm{ord}(x) \geq 0$. Mentre se $\mathrm{ord}(f/g) \geq 0$, posto $n = \mathrm{ord}(g)$, si ha $f/g = \varphi((f,n)/(g,n))$ con $(f,n)/(g,n) \in G_{(\mathfrak{p})}$. In definitiva $x \in \varphi(G_{(\mathfrak{p})})$ se e solo se $\mathrm{ord}(x) \geq 0$, cioè $\varphi(G_{(\mathfrak{p})})$ è l'anello di valutazione di ord. □

Proposizione 4.24. *Sia S regolare e separato, P e Q punti infinitamente vicini di S, tali che $P \prec Q$, $i : X \to S$ una inclusione di P, P_X il punto chiuso di X, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo P_X, $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, $g : Y \to \tilde{X}$ tale che $j = i \circ \pi \circ g$. Allora sono equivalenti*

(a) *la valutazione* ord_P *è non negativa su* $\mathcal{O}_{S,Q}$*;*

(b) *il divisore $E = \pi^{-1}(P_X)$ passa per il punto infinitamente vicino di $\tilde{X}$ definito dall'inclusione g.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) implica (b). Se ord_P è non negativa su $\mathcal{O}_{S,Q}$, allora $\mathcal{O}_{S,Q}$ è contenuto nell'anello di valutazione di ord_P, che per il lemma 4.23, è $((i \circ \pi)^\sharp_{\eta_{\tilde{X}}})^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E})$, dove $\eta_{\tilde{X}}$ e η_E sono i punti generici rispettivamente di X e di E. Detto $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E}$, sia $\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{S,Q} \cap \mathfrak{m}$. Si verifica subito che $\mathfrak{p}$ corrisponde ad un punto η di Y, tale che $g(\eta) = \eta_E$, dunque, stante la proposizione 4.15, E passa per Q.

Dimostriamo che (b) implica (a). Se E passa per Q, sia $\eta = g^{-1}(\eta_E)$, allora, detto η_Y il punto generico di Y, si ha $g^\sharp_{\eta_Y}(\mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E}) = \mathcal{O}_{Y,\eta}$ e dunque $\mathcal{O}_{S,Q} \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{X},\eta_E}$, che è l'anello di valutazione di ord_P. Dunque vale (a). □

Definizione 4.25. Sia S regolare e separato, P e Q punti infinitamente vicini di S, tali che $P \prec Q$. Allora diremo che Q è *prossimo* a P e scriveremo $Q\lceil P$, o $P\rceil Q$, se ord_P è non negativa su $\mathcal{O}_Q$.

La definizione ora data è quella di [Zariski, appendice al capitolo II, di J. Lipman], la proposizione 4.24 ne illustra il significato geometrico. Ora vogliamo vedere quali collegamenti ci sono tra la relazione di prossimità e le altre introdotte prima.

Lemma 4.26. *Sia S regolare e separato, C un divisore di S, P un punto infinitamente vicino di S, $i : X \to S$ una inclusione di P, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo il suo punto chiuso P_X, E il divisore eccezionale di $\tilde{X}$, $\tilde{C}$ il trasformato stretto di C su $\tilde{X}$. Allora $\sum_Q (\tilde{C} \cdot E)_Q = \mu_P(C)$, dove Q varia tra i punti chiusi e infinitamente vicini di $\tilde{X}$.*

Dimostrazione. Come al solito, possiamo ragionare sul morfismo Proj $G \to$ Spec A, dove $A = \mathcal{O}_{S,P}$ e $G = \oplus_n \mathfrak{m}^n$, con $\mathfrak{m}$ ideale massimale di A. Il divisore $\tilde{C}$ corrisponde all'ideale di G generato da $(f, \mu_P(C))$, dove f è un'equazione locale di C, mentre E corrisponde all'ideale $\oplus \mathfrak{m}^{n+1}$ dunque l'ideale dell'intersezione è la somma di tali ideali. Ma $\sum_Q (\tilde{C} \cdot E)$ è la lunghezza per $n >> 0$ della componente omogenea del quoziente di G per la suddetta somma. Tale quoziente è naturalmente isomorfo al quoziente dell'anello graduato $\oplus \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ per la classe di $(f, \mu_P(C))$. Ma, essendo $\mathcal{O}_{S,P}$ locale regolare, l'anello graduato $\oplus \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ è un anello di polinomi in due variabili, dunque la lunghezza delle componenti omogenee di grado $n >> 0$ del quoziente rispetto all'ideale generato da un elemento di grado $\mu_P(C)$, è uguale a $\mu_P(C)$. $\square$

Proposizione 4.27. *Sia S regolare e separato, P un punto infinitamente vicino di S, e sia C un divisore di S. Allora si ha*

(a) $Q \succeq P \Rightarrow \mu_Q(C) \leq \mu_P(C)$*;*

(b) *se C è regolare come schema, allora C è regolare in ogni suo punto infinitamente vicino;*

(c) $\mu_P(C) = \sum_{Q \lceil P} \mu_Q(C)$*.*

Dimostrazione. Sia $i : X \to S$ un'inclusione di P, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo il suo punto chiuso P_X, $\tilde{C}$ il trasformato stretto di C su $\tilde{X}$, ed E il divisore eccezionale. Per il lemma 3.27, per ogni punto infinitamente vicino $Q \succ P$ esiste un unico punto infinitamente vicino Q_X di $\tilde{X}$, tale che $(i \circ \pi)_*(Q_X) = Q$, e dunque $\mu_Q(C) = \mu_{Q_X}(\tilde{C})$; inoltre, per la proposizione 4.24, $Q\lceil P$ se e solo se E passa per Q_X.

Detto Γ l'insieme dei punti chiusi (e infinitamente vicini) di $\tilde{X}$, ed I l'insieme dei punti infinitamente vicini di $\tilde{X}$, per il corollario 4.22 e il lemma 4.26 possiamo scrivere

$$(*) \qquad \mu_P(C) = \sum_{Q_X \in \Gamma} (\tilde{C} \cdot E)_{Q_X} = \sum_{Q_X \in I} \mu_{Q_X}(\tilde{C}) \mu_{Q_X}(E).$$

Proviamo (a) e (b). Per provare (b) bisogna dimostrare che $\mu_P(C) = 1$ per ogni $P \in C$, basta quindi dimostrare che $\mu_P(C) \leq 1$ per ogni punto infinitamente vicino di S. Poiché C è regolare come schema, allora l'asserto è vero per i punti chiusi, dunque (b) discende da (a). Ragionando per induzione sull'intero n tale che esista una catena $i(P_X) \dashv \cdots \dashv P_n = P$ ci riduciamo a provare che se $Q \vdash P$, allora $\mu_Q(C) \leq \mu_P(C)$. Ma tali Q sono esattamente $(i \circ \pi)_*(Q_0)$, con $Q_0 \in \Gamma$, e poiché tali Q_0 devono appartenere ad E (perché $(i \circ \pi)_*(Q_0) = Q \vdash P$ implica $i(Q_0) = P_X$), l'uguaglianza $(*)$ implica che $\mu_Q(C) = \mu_{Q_0}(\tilde{C}) \leq \mu_P(C)$, come volevamo.

Per dimostrare (c), basta dunque osservare che per $(*)$, per la parte (b), per la regolarità di E, e per la proposizione 4.24, possiamo scrivere

$$\mu_P(C) = \sum_{Q_X \in I} \mu_{Q_X}(\tilde{C}) \mu_{Q_X}(E) = \sum_{Q_X \in E} \mu_{Q_X}(\tilde{C}) \cdot 1 = \sum_{Q \lceil P} \mu_Q(C).$$

$\square$

Proposizione 4.28. *Sia S regolare e separato, e P e Q due punti infinitamente vicini di S. Allora si ha*

(a) $Q \vdash P \Rightarrow Q\lceil P$*;*

(b) $Q\lceil P, Q \succeq Q' \succ P \Rightarrow Q'\lceil P$*;*

(c) *ogni punto infinitamente vicino è prossimo ad al più due altri.*

Dimostrazione. Sia $P \prec Q$, $i : X \to S$ un'inclusione di P, $j : Y \to S$ un'inclusione di Q, $\pi : \tilde{X} \to X$ il morfismo di scoppiamento di X lungo il suo punto chiuso P_X. Per la proposizione 3.27, esiste un morfismo $g : Y \to \tilde{X}$ tale che $j = i \circ \pi \circ g$. Sia poi P_Y il punto chiuso di Y e $Q_X = g(P_Y)$.

Proviamo (a). Se $Q \vdash P$, per il lemma 3.28 si ha che Q_X è il punto infinitamente vicino di $\tilde{X}$ definito da g. Poiché $\pi(Q_X) = P_X$, Q_X appartiene al divisore eccezionale, e per la proposizione 4.24, questo implica che $Q \lceil P$.

Dimostriamo (b). Sia ora $Q \succeq Q' \succ P$ e definiamo per Q', analogamente a quanto fatto per Q, i morfismi $j' : Y' \to S$ e $g' : Y' \to \tilde{X}$, e i punti $P_{Y'} \in Y'$ e $Q'_X \in \tilde{X}$. Poiché $\tilde{X}$ è separato, si ha $Q_X \succeq Q'_X$, dunque esiste un morfismo $f' : Y \to Y'$ tale che $g = g' \circ f'$. Ma allora detto η il punto generico del divisore eccezionale di $\tilde{X}$, e tenendo presenti le proposizioni 4.15 e 4.24, si ha $Q \lceil P \Rightarrow f'^{-1}(g'^{-1}(\eta)) = g^{-1}(\eta) \neq \emptyset \Rightarrow g'^{-1}(\eta) \neq \emptyset \Rightarrow Q' \lceil P$.

Proviamo (c). Sia $P_0 = i(P_X)$ e sia $P_0 \dashv P_1 \dashv \cdots \dashv P_n = P$ la catena dei punti precedenti P. I punti a cui P è prossimo, dovendo per definizione precedere P, sono tra tali punti. Se $n \leq 1$, abbiamo finito. Sia allora $n \geq 2$, e sia α il minimo tra gli indici k tali che P è prossimo a P_k. Dato che, per la parte (a), $P_{n-1} \rceil P$, ci basta dimostrare che P non è prossimo a P_k, se $\alpha < k < n-1$.

Supponiamo per assurdo che P_k sia prossimo a P, con $\alpha < k < n-1$, e siano $i_\alpha : X_\alpha \to S$, $i_k : X_k \to S$, $i_{n-1} : X_{n-1} \to S$ inclusioni rispettivamente di P_α, P_k e P_{n-1}, $\pi_\alpha : \tilde{X}_\alpha \to X_\alpha$, $\pi_k : \tilde{X}_k \to X_k$ i morfismi di scoppiamento rispettivamente di X_α e X_k rispetto ai punti chiusi P_{X_α} e P_{X_k}. Per le proposizioni del capitolo 3, esistono dei morfismi componenti la seguente sequenza

$$X \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \tilde{X}_k \xrightarrow{\pi_k} X_k \longrightarrow \tilde{X}_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha \longrightarrow S,$$

tali che i sia la composizione di tali morfismi, i_{n-1} sia la composizione dei morfismi a partire da X_{n-1}, e analogamente per i_k e i_α. Sia E_α il divisore eccezionale di $\tilde{X}_\alpha$. Poiché $P \lceil P_\alpha$, il trasformato stretto di E_α su X, mediante la catena di morfismi, è non nullo, dunque è non nullo il trasformato stretto di E_α su ogni schema della catena. Lo stesso vale per il divisore eccezionale E_k di $\tilde{X}_k$. Se Q è il punto infinitamente vicino di $\tilde{X}_\alpha$ definito dal morfismo $X \to \tilde{X}_\alpha$ della catena, Q_{n-1} è quello definito dal morfismo $X_{n-1} \to \tilde{X}_\alpha$ e Q_k è quello definito dal morfismo $X_k \to \tilde{X}_\alpha$, allora si ha che E_α passa per Q, Q_{n-1} e Q_k (perché sono non nulli i trasformati stretti), dunque, essendo E_α regolare, si ha $\mu_Q(E_\alpha) = 1$, $\mu_{Q_{n-1}}(E_\alpha) = 1$ e $\mu_{Q_k}(E_\alpha) = 1$. D'altra parte, poiché i trasformati stretti di E_k sono non nulli, si ha che Q e Q_{n-1} sono prossimi a Q_k. Dunque si ha $1 = \mu_{Q_k}(E_\alpha) = \sum_{Q' \lceil Q_k} \mu_{Q'}(E_\alpha) \geq \mu_Q(E_\alpha) + \mu_{Q_{n-1}}(E_\alpha) = 2$, il che è assurdo. □

Definizione 4.29. Se $P \dashv Q \prec Q'$ e Q' è prossimo a P, allora Q' si dice *satellite* di Q. Un punto che non è satellite di nessun altro si dice *libero*.

Osservazione 4.30. Per la proposizione 4.28b e c, i punti satelliti di un punto infinitamente vicino formano una catena; ed un punto infinitamente vicino è satellite di al più un altro punto.

La configurazione di singolarità.

Una curva non singolare su una superficie non ha punti multipli e punti satelliti, dunque i punti multipli e i punti satelliti di un divisore, per così dire descrivono la singolarità di una curva. La molteplicità in ogni punto, che spesso è un'utile informazione, per le proposizioni dimostrate in questo capitolo, è determinata non appena si conoscano i punti multipli e satelliti, e i punti immediatamente successivi a questi.

Definizione 4.31. Sia S regolare e separato, e C un suo divisore. Diremo *configurazione della singolarità* di C l'insieme dei punti infinitamente vicini di C che siano multipli, satelliti, o punti immediatamente successivi ad un punto multiplo o satellite.

Osservazione 4.32. Non è difficile dimostrare che la configurazione della singolarità di una curva descrive, insieme alle due relazioni *seguire* ed *essere prossimo* il "tipo" di singolarità, in relazione alla classificazione "debole" (cfr. [Hartshorne, capitolo V, osservazione 3.9.4]). Si può anche provare che un divisore ridotto (cioè privo di componenti multiple) ha configurazione di singolarità finita.

CAPITOLO V

Grafi di Enriques

Rappresentazione grafica di insiemi di punti infinitamente vicini.

Definizione 5.1. Un'insieme **e** di punti infinitamente vicini si dice *isolato*, se è finito e se

$$P \in \mathbf{e}, Q \preceq P \Rightarrow Q \in \mathbf{e}.$$

Enriques (cfr. [Enriques-Chisini]) utilizzava dei diagrammi molto convenienti per descrivere insiemi isolati di punti infinitamente vicini di superfici lisce: in effetti, se **e** è un tale insieme, si tratta di disegnare il grafo orientato $(e, \dashv)$, in maniera da dare conto anche della relazione di prossimità.

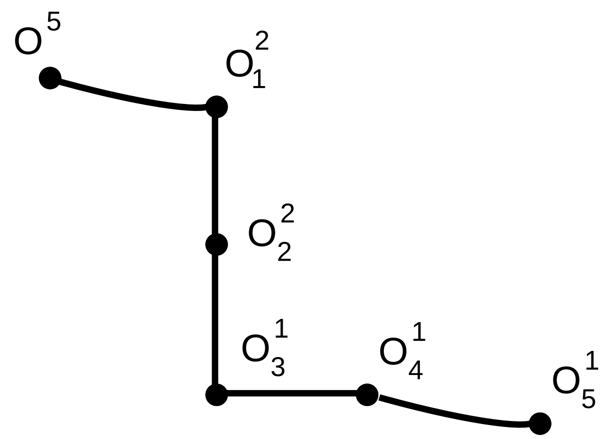

Figura 4.

Ricordiamo che un grafo orientato è semplicemente un insieme finito dotato di una relazione binaria (*). Per descrivere visivamente un grafo si disegnano dei punti per rappresentare gli elementi dell'insieme, e ogniqualvolta un elemento è in relazione con un altro si disegna una freccia curva che va dal punto che rappresenta il primo al punto che rappresenta il secondo. Dalla proposizione 3.29 segue che ogni componente connessa del grafo $(e, \dashv)$ è un albero (anzi un arborescenza (*)), e dalla proposizione 4.28, segue che i punti prossimi ad un dato punto P formano dei sentieri (*) (cioè delle catene $P_1 \dashv \cdots \dashv P_n \dashv \cdots$ di punti distinti) che partono ciascuna da un punto susseguente a P. Per dare conto della relazione di prossimità, si può dunque disegnare l'albero facendo in modo che ogni catena di punti prossimi a P sia fatta da segmenti consecutivi, giacenti su una stessa retta perpendicolare in P_1 all'arco $P \dashv P_1$, avendo cura di disegnare due archi adiacenti perpendicolari esclusivamente in questa situazione. Inoltre se il verso delle relazioni risulta evidente (per esempio se il grafo è connesso e sappiamo che un certo punto rappresenta un punto chiuso, quindi minimale), si possono disegnare semplici archi al posto delle frecce. Se

(*) Per le definizioni di teoria dei grafi seguiamo [Berge].

si vuole disegnare il diagramma di un insieme di punti infinitamente vicini di un divisore, si può scrivere la molteplicità o direttamente accanto al punto, oppure, se questo ha un nome, scriverla come apice sulla lettera che indica il punto.

A titolo di esempio, la figura 4 rappresenta un insieme di punti infinitamente vicini di una curva C su una superficie, $\{O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$, dove $O \dashv O_1 \dashv O_2 \dashv O_3 \dashv O_4 \dashv O_5$ (e quindi $O \rceil O_1 \rceil O_2 \rceil O_3 \rceil O_4 \rceil O_5$), $O_2 \lceil O$, $O_3 \lceil O$, $O_4 \lceil O_2$, e dove O ha molteplicità 5, O_1 e O_2 sono doppi per C (cioè hanno molteplicità due) mentre gli altri sono semplici.

Definizione dei grafi di Enriques.

Ci conviene dare ora una definizione formale dei grafi di Enriques, in quanto ce ne serviremo per studiare gli insiemi di divisori che hanno uno stesso "tipo" di singolarità.

Definizione 5.2. Diciamo *grafo di Enriques* una terna $(\mathbf{e}, \vdash, \lceil)$, dove $\mathbf{e}$ è un insieme finito (i cui elementi saranno detti punti) in cui esista una relazione d'ordine $\succeq$ (*seguire*) tale che, per $P, P' \in \mathbf{e}$,

$$P' \vdash P \iff (P' \succ P \text{ e se } P' \succeq Q \succeq P \text{ allora } Q = P \text{ o } Q = P'),$$

e tale che, indicata con $\rceil$ la relazione opposta di $\lceil$ (*essere prossimo*), definite come in 3.23 le varie nozioni legate a $\succeq$, si abbia:

(a) $P \lceil Q \Rightarrow P \succ Q$;
(b) Ogni punto è susseguente ad al più un altro;
(c) $P \vdash Q \Rightarrow P \lceil Q$;
(d) $Q \lceil P, Q \succeq Q' \succ P \Rightarrow Q' \lceil P$;
(e) Ogni punto è prossimo ad al più due altri.

Diremo, in accordo con la definizione 4.29, *libero* un punto prossimo al più al punto immediatamente precedente. Definiamo infine *morfismo* tra i grafi di Enriques $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ un'applicazione $f : \mathbf{e} \to \mathbf{e}'$ tale che $P \dashv Q \Rightarrow f(P) \dashv f(Q)$ e $P \lceil Q \Rightarrow f(P) \lceil f(Q)$. Un *isomorfismo* sarà un morfismo che ammette un morfismo inverso.

Proposizione 5.3. *Sia* $\mathbf{e}$ *un grafo di Enriques. Esiste un'unica funzione* $\mu_{\mathbf{e}} : \mathbf{e} \to \mathbf{Z}$ *tale che per ogni punto massimale* P *si abbia* $\mu_{\mathbf{e}}(P) = 1$, *e che per ogni punto non massimale* Q *si ha* $\mu_{\mathbf{e}}(P) = \sum_{Q \lceil P} \mu_{\mathbf{e}}(Q)$.

Dimostrazione. Ovvia.

Definizione 5.4. La funzione di molteplicità $\mu_{\mathbf{e}}$, esistente in base alla proposizione 5.3, si dirà *funzione di molteplicità associata* ad $\mathbf{e}$.

Un grafo di Enriques $\mathbf{e}$ sarà chiamato *grafo di singolarità* se i punti massimali non sono minimali, sono liberi, e vale la seguente implicazione:

$$\forall P, Q \in \mathbf{e}, P \dashv Q, Q \text{ massimale} \Rightarrow P \text{ non è libero oppure } \mu_{\mathbf{e}}(P) > 1.$$

Osservazione 5.5. Se S è regolare e separato, e C è un divisore ridotto di S, allora la configurazione di singolarità di C, insieme alle relazioni $\vdash$ e $\lceil$, è un grafo di singolarità $\mathbf{e}$ (cfr. Osservazione 4.32). Inoltre, per ogni punto $P \in \mathbf{e}$ si ha $\mu_{\mathbf{e}}(P) = \mu_P(C)$.

CAPITOLO VI

Schema associato ad un insieme isolato di punti infinitamente vicini

Così come un insieme finito di punti chiusi di un qualsiasi schema è il sostegno di un ben determinato sottoschema ridotto, anche per un insieme finito di punti infinitamente vicini si può considerare un sottoschema che, in un certo senso, lo rappresenti; come c'è da aspettarsi, però, la situazione presenta delle complicazioni.

Innanzitutto osserviamo che se una certa curva C passa per un punto infinitamente vicino P, allora C passa anche per tutti i punti che precedono P (cfr. proposizione 4.18), dunque considereremo solo insiemi isolati di punti infinitamente vicini.

Quello che ci si aspetta, in analogia con il caso degli insiemi finiti di punti chiusi, è che il sottoschema che "naturalmente" rappresenta un insieme isolato di punti infinitamente vicini possa essere definito considerando le funzioni regolari che si annullano su tutti i punti del nostro insieme. Non è un problema definire l'annullamento di una funzione regolare su un punto infinitamente vicino: basta imporre che il divisore (f) passi per P. Tuttavia (cfr. [Enriques-Chisini, libro IV, capitolo I, paragrafo 12]), le funzioni che si annullano in un punto P non definiscono un fascio di ideali, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.1. Sia $S = \operatorname{Spec} k[x,y]$, dove k è un campo e x, y sono indeterminate, sia P il punto (chiuso e infinitamente vicino) dato dall'ideale generato da x, y, e P_1 il punto infinitamente vicino a P lungo la direzione dell'asse x, cioè quello determinato dall'anello locale $k[x,y,y/x]_{\mathfrak{p}}$, dove $\mathfrak{p}$ è l'ideale generato in $k[x,y,y/x]$ da x e y/x. È facile verificare che i divisori (y) e $(y+x^2)$ passano per P_1, mentre il divisore di $x^2 (= (y+x^2) - y)$ non passa per P_1. In generale si verifica che un polinomio che abbia molteplicità almeno due in P, appartiene all'ideale generato dai polinomi il cui divisore degli zeri passi per P_1.

Qualcosa di ancora più strano capita se k non è algebricamente chiuso.

Esempio 6.2. Sia $S = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x,y]$, con $\mathbf{R}$ campo dei numeri reali, e sia P_1 il punto infinitamente vicino determinato dall'anello locale $\mathbf{R}[x,y,y/x]_{\mathfrak{p}}$, dove $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo generato in $\mathbf{R}[x,y,y/x]$ da x e $\frac{x^2+y^2}{x^2}$. Si verifica facilmente che ogni polinomio di $\mathbf{R}[x,y]$ il cui divisore degli zeri passi per P_1, ha molteplicità almeno due in P.

A causa di queste complicazioni, per chiarezza d'ora in poi lavoreremo su superfici lisce su un campo algebricamente chiuso, che sono poi quelle che ci interessano.

Definizione 6.3. Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso, $\mathbf{e}$ un insieme isolato di punti infinitamente vicini di S, $\mu_{\mathbf{e}}$ la funzione di molteplicità associata ad $\mathbf{e}$, supposto con la sua naturale struttura di grafo di Enriques, U un aperto di S, e infine sia f un elemento di $\mathcal{O}(U)$. Diremo che f *si annulla propriamente* su $\mathbf{e}$ se il divisore (f) passa per ogni $P \in \mathbf{e}$ che stia anche in U (cioè che sia tale che una sua inclusione fattorizzi per l'immersione di U). Diremo che f *si annulla* su $\mathbf{e}$ se per ogni $P \in \mathbf{e}$ si ha $\operatorname{ord}_P(f) \geq \sum_{Q \preceq P} \mu_{\mathbf{e}}(Q)$.

Osservazione 6.4. Si può dimostrare facilmente, usando il lemma 4.23, che se f si annulla propriamente su $\mathbf{e}$, allora f si annulla su $\mathbf{e}$.

Definizione 6.5. Se f si annulla su $\mathbf{e}$ e non si annulla propriamente su $\mathbf{e}$, allora diremo che f *si annulla impropriamente* su $\mathbf{e}$.

Definizione 6.6. Sia $\mathbf{e}$ un grafo di singolarità, $\mu_{\mathbf{e}}$ la funzione di molteplicità ad esso associata, M il massimo di tale funzione, N il numero di punti di $\mathbf{e}$, e siano infine $P_1, \dots, P_n$ i punti massimali di $\mathbf{e}$. Un grafo di Enriques $\hat{\mathbf{e}}$ sarà detto *ampliamento* di $\mathbf{e}$ *tramite* un morfismo iniettivo $\iota : \mathbf{e} \to \hat{\mathbf{e}}$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) ι manda punti minimali in punti minimali;

(b) per ogni P_i, i punti di $\hat{\mathbf{e}}$ successivi a $\iota(P_i)$ formano una catena $Q_1 \vdash \cdots \vdash Q_{NM}$, di lunghezza NM;

(c) ogni punto di $\hat{\mathbf{e}} - \iota(\mathbf{e})$ è successivo ad un $\iota(P_i)$.

Proposizione 6.7. *Ogni grafo di singolarità ammette un ampliamento, ed ampliamenti di uno stesso grafo sono tutti isomorfi tra di loro.*

Dimostrazione. Ovvia. □

Proposizione 6.8. *Se C è un divisore di uno schema S regolare e separato, ed $\mathbf{e}$ è la sua configurazione di singolarità, allora C passa per un insieme $\hat{\mathbf{e}}$ di punti infinitamente vicini che contiene $\mathbf{e}$ ed è un suo ampliamento tramite l'inclusione. Sia poi U un aperto di S ed f un elemento di $\mathcal{O}_S(U)$ tale che si annulli su $\hat{\mathbf{e}}$, tale che gli unici punti chiusi di U in cui il divisore (f) è singolare sono i punti minimali di $\mathbf{e}$ che stanno in U, e tale che in ogni tale punto P si abbia $\mu_P((f)) = \mu_P(C)$. Allora $(f) \cap U$ ha configurazione di singolarità uguale ad $\mathbf{e} \cap U$ (con l'ovvio significato delle notazioni).*

Dimostrazione. Per definizione di configurazione di singolarità, C ha molteplicità uno nei punti massimali P_i di $\mathbf{e}$, e poiché la molteplicità in un punto è uguale alla somma delle molteplicità nei punti prossimi, si ha che esiste esattamente un punto Q_1, prossimo ad un punto massimale P_i in cui C ha molteplicità uno, e Q_1 deve essere immediatamente successivo a P_i (altrimenti tutti i punti compresi sarebbero prossimi e avrebbero molteplicità uno). Detta $\mu_{\mathbf{e}}$ la funzione di molteplicità associata ad $\mathbf{e}$, M il suo massimo ed N il numero di punti di $\mathbf{e}$, iterando il ragionamento ora fatto, possiamo ottenere una catena di lunghezza NM, $Q_1 \vdash \cdots \vdash Q_{NM}$, di punti successivi a P_i, per cui C passa (semplicemente). Questo prova l'esistenza di $\hat{\mathbf{e}}$.

Per provare la seconda parte, ci basta provare che (f) ha molteplicità uno nei P_i: infatti, sempre per il fatto che la molteplicità in un punto è uguale alla somma delle molteplicità nei punti prossimi, se (f) ha molteplicità uno nei P_i allora ha le stesse molteplicità di C in tutti i punti di $\mathbf{e}$ (cfr. proposizione 5.3), ed (f) non può avere punti multipli al di fuori di $\mathbf{e}$, altrimenti (cfr. proposizione 4.27) ci sarebbero punti chiusi singolari al di fuori di $\mathbf{e}$, in contrasto con l'ipotesi. Ma se dimostriamo che $\mu_{P_i}((f)) \geq 1$ (per ogni i), dovrà valere l'uguaglianza, infatti se per un P_i la disuguaglianza fosse stretta, per il punto minimale P ad esso precedente si avrebbe $\mu_P((f)) > \mu_P(C)$ in contrasto con l'ipotesi.

Supponiamo allora per assurdo che esista un P_i tale che $\mu_{P_i}((f)) = 0$. Sia Q il punto massimale di $\hat{\mathbf{e}}$ successivo a P_i. Allora, tenendo ancora presente la proposizione 4.27, si ha che $\mathrm{ord}_Q(f) = \sum_{P \preceq Q} \mu_P((f)) < NM$, perché i punti precedenti Q con molteplicità non nulla, essendo tutti precedenti P_i, quindi appartenenti a $\mathbf{e}$, sono in numero inferiore ad N, ed hanno molteplicità inferiore o uguale ad M, perché nel punto minimale P che precede Q si ha $\mu_P((f)) = \mu_P(C) \leq M$. Ma ciò è in contrasto chiaramente con il fatto che f si annulla su $\hat{\mathbf{e}}$, dato che per come è definito tale grafo, sicuramente $\sum_{P \preceq Q} \mu_{\hat{\mathbf{e}}}(P) \geq NM$. □

Lo schema associato ad un insieme isolato di punti infinitamente vicini.

Proposizione 6.9. *L'insieme delle sezioni che si annullano su un insieme isolato* $\mathbf{e}$ *di punti infinitamente vicini di una superficie liscia S su un campo algebricamente chiuso, costituiscono un fascio di ideali.*

Dimostrazione. Segue subito dalle definizioni e dalle proprietà delle valutazioni. □

Definizione 6.10. Il fascio di ideali determinato nella proposizione 6.9 si dice fascio di ideali *associato* ad $\mathbf{e}$, e sarà generalmente indicato con $\mathcal{I}_{\mathbf{e}}$.

Proposizione 6.11. *Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso,* $\mathbf{e}$ *un insieme isolato di punti infinitamente vicini di S, P un punto minimale di* $\mathbf{e}$ *(quindi un punto chiuso di S), $\pi : \tilde{S} \to S$ il morfismo di scoppiamento di S in P, E il divisore eccezionale,* $\tilde{\mathbf{e}}$ *l'insieme dei punti infinitamente vicini di $\tilde{S}$ che tramite π_* vanno (biunivocamente) nei punti di* $\mathbf{e} - \{P\}$*, $\mathcal{I}_{\tilde{\mathbf{e}}}$ il fascio di ideali associato ad* $\tilde{\mathbf{e}}$*. Allora il fascio di ideali associato a* $\mathbf{e}$ *è il nucleo del morfismo di fasci*

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\pi^\sharp} \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}}/\mathcal{I}_{\tilde{\mathbf{e}}} \cdot \mathcal{I}_E^{\mu_{\mathbf{e}}(P)})).$$

Dimostrazione. Segue dal lemma 4.23 e dalla proposizione 4.27. □

Dalle proprietà di conservazione della coerenza (cfr. [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 5, proposizioni 5.7, 5.8]), per induzione segue subito il seguente risultato.

Corollario 6.12. *Il fascio di ideali $\mathcal{I}_{\mathbf{e}}$ associato ad un insieme isolato* $\mathbf{e}$ *di punti infinitamente vicini di una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso è coerente.*

Definizione 6.13. Sia $\mathbf{e}$ un insieme isolato di punti infinitamente vicini di una superficie liscia S. Il sottoschema $X_{\mathbf{e}}$ di S definito da $\mathcal{I}_{\mathbf{e}}$ si dice *sottoschema associato* a $\mathbf{e}$.

Schema di annullamento e schemi di annullamento improprio.

Definizione 6.14. Sia $\mathbf{e}$ un insieme isolato di punti infinitamente vicini di una superficie liscia S, sia $\mu_{\mathbf{e}}$ la funzione di molteplicità associata ad $\mathbf{e}$, P_1, …, P_n i punti minimali di $\mathbf{e}$ con fasci di ideali rispettivi $\mathcal{I}_1$, …, $\mathcal{I}_n$. Gli schemi X_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) definiti dai fasci di ideali $\mathcal{I}_i^{\mu_{\mathbf{e}}(P_i)+1}$ si dicono *sottoschemi di annullamento improprio* su $\mathbf{e}$. Se $\mathbf{e}$ è un grafo di singolarità, ogni sottoschema $X_{\hat{\mathbf{e}}}$ di S, associato ad un insieme isolato $\hat{\mathbf{e}}$ di punti infinitamente vicini di S che sia un ampliamento di $\mathbf{e}$ sarà detto *sottoschema di annullamento* su $\mathbf{e}$. Siano infine Q_1, …, Q_m punti chiusi distinti di S, con fasci di ideali rispettivi $\mathcal{I}'_1$, …, $\mathcal{I}'_m$, allora diremo *sottoschema associato agli m punti multipli Q_1, …, Q_m* lo schema definito dal fascio di ideali ${\mathcal{I}'_1}^2 \cdot {\mathcal{I}'_2}^2 \cdots {\mathcal{I}'_m}^2$.

Proposizione 6.15. *Sia* $\mathbf{e}$ *un insieme isolato di punti infinitamente vicini di una superficie liscia* S*, che con la sua naturale struttura di grafo di Enriques sia un grafo di singolarità, e sia* m *il numero dei punti minimali di* $\mathbf{e}$*. Un divisore* C *di* S *ha configurazione di singolarità* $\mathbf{e}$ *se e solo se passa per un sottoschema di annullamento su* $\mathbf{e}$*, non passa per nessun sottoschema di annullamento improprio su* $\mathbf{e}$ *e non passa per nessun sottoschema associato ad* $m+1$ *punti multipli.*

Dimostrazione. Segue subito dalle definizioni e dalla proposizione 6.8. □

CAPITOLO VII

Famiglie di singolarità di dato tipo

Scopo di questo capitolo è costruire una famiglia costituita da tutti i sottoschemi associati a insiemi isolati di punti infinitamente vicini di una superficie S, isomorfi ad un dato grafo di Enriques.

Incominciamo con lo stabilire un lemma, che ci sarà utile nel seguito, che afferma sostanzialmente che lo scoppiamento di una famiglia lungo una famiglia piatta di sottoschemi coincide con la famiglia degli scoppiamenti.

Lemma 7.1. *Sia $f : S \to T$ un morfismo di schemi noetheriani, X un sottoschema chiuso di S, piatto su T, $\pi : \tilde{S} \to S$ lo scoppiamento di S lungo X, t un punto di T, $(\tilde{S})_t$, S_t, X_t, le fibre in t rispettivamente di $f \circ \pi$, f, $f|_X$, e infine $\pi_t : \widetilde{(S_t)} \to S_t$ lo scoppiamento di S_t lungo il suo sottoschema chiuso X_t. Allora si ha $(\tilde{S})_t \cong \widetilde{(S_t)}$.*

Dimostrazione. Detto $i : S_t \to S$ il morfismo naturale e detti $\mathcal{I}_X$ e $\mathcal{I}_{X_t}$ i fasci di ideali rispettivamente di X e X_t, ci si rende subito conto che $\mathcal{I}_{X_t} = i^{-1}(\mathcal{I}_X) \cdot \mathcal{O}_{S_t}$; dunque (cfr. [Hartshorne, capitolo II, corollario 7.15]) c'è un morfismo $\tilde{i} : \widetilde{(S_t)} \to \tilde{S}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(S_t)} & \longrightarrow & \tilde{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_t & \longrightarrow & S \end{array}$$

Detto $k(t)$ il campo residuo in t, consideriamo $(\tilde{S})_t = \tilde{S} \times_T \operatorname{Spec} k(t) \cong \tilde{S} \times_S S \times_T \operatorname{Spec} k(t) \cong \tilde{S} \times_S S_t$. Per la proprietà universale del prodotto fibrato si ha che esiste $g : \widetilde{(S_t)} \to (\tilde{S})_t$ che rende commutativo il seguente diagramma, dove $p_{\tilde{S}}$ e p_{S_t} sono le proiezioni canoniche di $(\tilde{S})_t$ rispettivamente su S_t ed $\tilde{S}$:

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \widetilde{(S_t)} \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "\tilde{i}"] \arrow[ddr, "\pi_t"'] & & \\ & (\tilde{S})_t \arrow[r, "p_{\tilde{S}}"] \arrow[d, "p_{S_t}"] & \tilde{S} \arrow[d, "\pi"] \\ & S_t \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\ k(t) \arrow[r] & T \end{tikzcd} .$$

Dobbiamo provare che $g : \widetilde{(S_t)} \to (\tilde{S})_t$ è un isomorfismo (si tratta, almeno nel caso che t sia un punto chiuso, di provare che il trasformato stretto coincide col trasformato totale).

Possiamo certamente ragionare localmente, cioè ci basta considerare un ricoprimento aperto $\{U_j\}$ di $(\tilde{S})_t$, e provare che $g|_{g^{-1}(U_j),U_j} : g^{-1}(U_j) \to U_j$ è un isomorfismo per ogni j. Consideriamo allora un intorno affine di t, $U = \mathrm{Spec}\ A$, e un aperto affine $V = \mathrm{Spec}\ B$ di $f^{-1}(U)$. Da $(*)$ si ottiene il seguente diagramma commutativo, dove O è l'aperto $p_{S_t}^{-1}(i^{-1}(V)) = p_{\tilde{S}}^{-1}(\pi^{-1}(V))$:

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} g^{-1}(O) \arrow[dr, "g|_{g^{-1}(O),O}"] \arrow[drr, "\tilde{i}|_{g^{-1}(O),\pi^{-1}(U)}"] \arrow[ddr, "\pi_t|_{g^{-1}(O),i^{-1}(V)}"'] & & \\ & O \arrow[r, "p_{\tilde{S}}|_{O,\pi^{-1}(V)}"] \arrow[d, "p_{S_t}|_{O,i^{-1}(V)}"] & \pi^{-1}(V) \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(V),V}"] \\ & i^{-1}(V) \arrow[r, "i|_{i^{-1}(V),V}"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\ k(t) \arrow[r] & U \end{tikzcd} .$$

Ora $i^{-1}(V) \cong \mathrm{Spec}\ (k(t) \otimes_A B)$, $\pi^{-1}(V) \cong \mathrm{Proj}\ B^*$, dove $B^* := \oplus_n \mathfrak{p}^n$ con $\mathfrak{p}$ ideale del chiuso $X \cap V$ in A, $O \cong \mathrm{Proj}\ (B^* \otimes_B (B \otimes_A k(t))) \cong \mathrm{Proj}\ (B^* \otimes_A k(t))$, $g^{-1}(O) =$

$\pi_t^{-1}(i^{-1}(V)) \cong \mathrm{Proj}\ (k(t) \otimes_A B)^*$, dove $(k(t) \otimes_A B)^* := \oplus_n \bar{\mathfrak{p}}^n$ con $\bar{\mathfrak{p}}^n$ ideale in $k(t) \otimes_A B$ del chiuso $X_t \cap i(V)$. Con un po' di fatica nel controllo di tutte le definizioni, ci si rende conto che $(**)$ è indotto dal diagramma commutativo di anelli e omomorfismi

$$
(**) \qquad \begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & k(t) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
B & \longrightarrow & B \otimes_A k(t) & & \\
\downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
B^* & \longrightarrow & B^* \otimes_A k(t) & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & (k(t) \otimes_A B)^*
\end{array} \quad .
$$

Proviamo che $\gamma : B^* \otimes_A k(t) \to (B \otimes_A k(t))^*$ è un isomorfismo, e ci basta ovviamente provare che per ogni grado n, $\gamma_n : (B^* \otimes_A k(t))_n \to ((B \otimes_A k(t))^*)_n$ (dove $(—)_n$ indica la componente omogenea di grado n) è un isomorfismo. Ora $(B^*)_n = \mathfrak{p}^n$, perciò $(B^* \otimes_A k(t))_n = \mathfrak{p}^n \otimes_A k(t)$, mentre $((B \otimes_A k(t))^*)_n = \bar{\mathfrak{p}}^n$. Ma $\bar{\mathfrak{p}}$ è l'immagine di $i_{\mathfrak{p}} \otimes_A \mathrm{id}_{k(t)} \to B \otimes_A k(t)$, e quest'ultimo è iniettivo, poiché, essendo X piatto su T, $B/\mathfrak{p}$ è piatto su A, e dunque dalla tensorizzazione su A di

$$0 \to \mathfrak{p} \to B \to B/\mathfrak{p} \to 0$$

per $k(t)$ si ha

$$0 = \mathrm{Tor}_A^1(B/\mathfrak{p}, k(t)) \to \mathfrak{p} \otimes_A k(t) \to B \otimes_A k(t).$$

Dunque $\gamma_1 : \mathfrak{p} \otimes_A k(t) \to \bar{\mathfrak{p}}$ è un isomorfismo da cui facilmente si ha che γ_n è un isomorfismo per ogni n. Abbiamo allora provato che $g|_{g^{-1}(O),O}$ è un isomorfismo di schemi, e poiché facendo variare V in un ricoprimento affine di $f^{-1}(U)$, O ricopre $(\tilde{S})_t$, si ha l'asserto. $\square$

Proposizione 7.2. *Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k ed m un intero. Allora esiste uno schema A su k e un sottoschema X di $S \times_k A$, piatto su A, tale che per ogni punto chiuso a di A la fibra X_a (che è in maniera naturale un sottoschema di S) è un sottoschema associato ad m punti multipli e ogni schema associato ad m punti multipli è una fibra X_a per qualche punto chiuso $a \in A$.*

Dimostrazione. Per induzione su m. Per $m = 0$ basta prendere $A = \mathrm{Spec}\ k$ e lo schema vuoto $X = \mathrm{Spec}\ \{0\}$ (dove $\{0\}$ è l'anello nullo). Sia allora $m > 0$ e A' e $X' \subset A' \times_k S$ tali che per ogni punto chiuso a' di A' la fibra $X'_{a'}$ è un sottoschema associato ad $m-1$ punti multipli e ogni schema associato ad $m-1$ punti multipli è una fibra $X'_{a'}$ per qualche punto chiuso $a' \in A'$. Sia $\Delta : S \to S \times_k S$ la diagonale, $\bar{S}$ il sottoschema di $S \times_k S \times_k A'$

immagine di $\Delta \times_k \mathrm{id}_{A'}$ ed $\bar{X}$ il sottoschema $S \times_k X' \subset S \times_k S \times_k A'$. Detta π la proiezione $S \times_k S \times_k A' \to S \times_k A'$ sul primo e terzo fattore, la restrizione di π ad $\bar{S} - (\bar{X})_{\mathrm{red}}$ è un'immersione aperta in $S \times_k A'$, e sia A tale aperto. Detti $\mathcal{I}_{\bar{S}}$ e $\mathcal{I}_{\bar{X}}$ i fasci di ideali di $\bar{S}$ e $\bar{X}$, il sottoschema di $S \times_k S \times_k A'$ definito da $\mathcal{I}_{\bar{S}}^2 \cdot \mathcal{I}_{\bar{X}}$, ristretto a $\pi^{-1}(A) = S \times_k A$ definisce il voluto sottoschema X. La piattezza di X su A dipende dal fatto che, essendo k algebricamente chiuso, le fibre nei punti chiusi sono spettri di k-algebre artiniane di dimensione costante $3m$ su k. Le altre proprietà si dimostrano con una verifica diretta. □

Definizione 7.3. Diciamo *famiglia algebrica di superfici lisce*, un morfismo $f : S \to T$ che sia una famiglia algebrica di varietà, nel senso di [Hartshorne, capitolo III, paragrafo 9, pag. 263], le cui fibre S_t, con t punto chiuso di T, siano superfici lisce.

Proposizione 7.4. *Sia $f : S \to T$ una famiglia di superfici lisce su un campo algebricamente chiuso k, $D_1, \ldots, D_n$ dei sottoschemi di S che siano famiglie di curve su T,* $\mathbf{e}$ *un grafo di Enriques, ed $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dei sottoinsiemi isolati di $\mathbf{e}$. Allora esiste uno schema A su T e dei sottoschemi chiusi X, X_1, …, X_m di $A \times_T S$, piatti su A, tali che, dette π_A e π_S le proiezioni di $A \times_T S$ rispettivamente su A e su S, e $p_A : A \to T$ il morfismo strutturale, si abbia:*

(I) *per ogni punto chiuso $a \in A$, posto $t = p_A(a)$, le fibre in a delle restrizioni di π_A ad X, X_1, …, X_m (che sono in maniera naturale sottoschemi chiusi della fibra S_t di f in t), sono rispettivamente il sottoschema associato e i sottoschemi di annullamento improprio su un insieme $\mathbf{e}_a$ di punti infinitamente vicini di S_t che, con la naturale struttura di grafo di Enriques, è isomorfo ad $\mathbf{e}$, ed inoltre si può stabilire l'isomorfismo in maniera che $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ i punti infinitamente vicini di $\mathbf{e}_a$ che appartengono alla fibra $(D_i)_t$ di $f|_{D_i}$ in t, siano tutti e soli i corrispondenti dei punti di $\mathbf{e}_i$;*

(II) *per ogni punto chiuso $t \in T$, se $\mathbf{e}_t$ è un insieme isolato di punti infinitamente vicini di S_t che, con la naturale struttura di grafo di Enriques, è isomorfo ad $\mathbf{e}$, tramite un isomorfismo tale che $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ i punti di $\mathbf{e}_t$ appartenenti a $(D_i)_t$ siano tutti e soli i corrispondenti dei punti di $\mathbf{e}_i$, allora esiste (almeno) un punto chiuso $a \in A$ tale che le fibre in a delle restrizioni di π_A ad X, X_1, …, X_m, siano rispettivamente il sottoschema associato e i sottoschemi di annullamento improprio su $\mathbf{e}_t$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero N dei punti di $\mathbf{e}$. La base di induzione è banale, perché se $N = 0$ basta prendere $A = T$, $m = 0$ e lo schema vuoto $X = \mathrm{Spec}\ \{0\}$ (dove $\{0\}$ è l'anello nullo).

Supponiamo allora $N > 0$, e sia P un punto minimale di $\mathbf{e}$. Possiamo supporre, a meno di ridenominare gli indici, che per un certo intero s, compreso tra 0 ed n (inclusi), $P \in \mathbf{e}_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$, e $P \notin \mathbf{e}_i$, $\forall i \in \{s+1, \ldots, n\}$. Allora possiamo prendere il sottoschema localmente chiuso di S, $A' = (D_1 \cap \ldots \cap D_s)_{\mathrm{red}} \cap (S - (D_{s+1} \cup \ldots \cup D_n))$, e, detta $i_{A'} : A' \to S$ una sua immersione, il morfismo $j_{X'} : A' \to A' \times_T S$ indotto dall'identità di A' a da $i_{A'}$, è una immersione chiusa che definisce quindi un sottoschema X' di $A' \times_T S$, piatto su A' (il morfismo $X' \to A'$ è l'identità).

Consideriamo la proiezione $f' : S' := A' \times_T S \to A'$, che è ancora una famiglia di superfici lisce su k, e sia $\pi : \tilde{S}' \to S'$ lo scoppiamento di S' lungo X'. Per il lemma 7.1, $f' \circ \pi : \tilde{S}' \to A'$ è ancora una famiglia di superfici lisce su k. Siano $\tilde{D}_i$ i trasformati stretti dei D_i, sia $\tilde{D}_0$ il divisore eccezionale di $\tilde{S}'$, poniamo poi $\tilde{\mathbf{e}} := \mathbf{e} - \{P\}$, $\tilde{\mathbf{e}}_i := \mathbf{e}_i - \{P\}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) ed $\tilde{\mathbf{e}}_0 = \{Q \in \mathbf{e} : Q \lceil P\}$. Applicando l'ipotesi di induzione ad $\tilde{f}' := f' \circ \pi$, $\tilde{D}_i$ ($i \in \{0, \ldots, n\}$), $\tilde{\mathbf{e}}_i$ ($i \in \{0, \ldots, n\}$), troviamo uno schema A su A' e sottoschemi $\tilde{X}$ e $\tilde{X}_1$, …, $X_{m'}$ di $A \times_{A'} \tilde{S}'$, con le proprietà (I) e (II).

Consideriamo il fascio di ideali $\mathcal{I}_{\tilde{X}} \cdot \mathcal{I}_{\tilde{D}_0}^{\mu_{\mathbf{e}}(P)}$ su $A \times_{A'} \tilde{S}'$, dove $\mu_{\mathbf{e}}$ è la funzione di molteplicità associata ad $\mathbf{e}$, e, posto $\sigma = \mathrm{id}_A \times_{A'} \pi$, sia X il sottoschema di $A \times_{A'} S'$ definito dal fascio di ideali nucleo del morfismo

$$\mathcal{O}_{A \times_{A'} S'} \xrightarrow{\sigma^\sharp} \sigma_* \mathcal{O}_{A \times_{A'} \tilde{S}'} \longrightarrow \sigma_*(\mathcal{O}_{A \times_{A'} \tilde{S}'}/\mathcal{I}).$$

Ora osserviamo che $m-1$ degli schemi $\tilde{X}_1$, …, $\tilde{X}_{m'}$, corrispondono ai punti minimali di $\tilde{\mathbf{e}}$ che sono anche punti minimali di $\mathbf{e}$ e sono contenuti nell'aperto in cui σ è un isomorfismo; dunque possiamo deinire X_1, …, X_{m-1} come i corrispondenti di tali schemi. Per definire X_m, basta considerare il sottoschema definito dal fascio di ideali $\mathcal{I}_{X'}^{\mu_{\mathbf{e}}(P)+1}$.

Osserviamo che $A \times_{A'} S' \cong A \times_{A'} (A' \times_T S) \cong (A \times_{A'} A') \times_T S \cong A \times_T S$, dunque possiamo senz'altro identificare $A \times_{A'} S'$ con $A \times_T S$, e provare che X, X_1, …, X_m ed A sono gli schemi voluti. La piattezza su A degli schemi X, X_1, …, X_m ora definiti dipende essenzialmente dal fatto che k è algebricamente chiuso, il che implica che le fibre nei punti chiusi sono spettri di k-algebre con dimensione su k costante: non faremo una verifica accurata di ciò. Proviamo ora (I) e (II) per la parte riguardante X, per quanto riguarda X_1, …, X_m la verifica è analoga e anzi più semplice.

Proviamo (I). Detto $p' : A \to A'$ il morfismo strutturale, poiché punti chiusi di A' vanno in punti chiusi di T, il morfismo strutturale $f|_{A'} \circ p'$ di A su T manda punti chiusi in punti chiusi. Posto $t = (f|_{A'} \circ p')(a)$, con a punto chiuso di A, $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_{\tilde{X}_t} \cdot \mathcal{I}_{(\tilde{D}_0)_t}^{\mu_{\mathbf{e}}(P)}$ e detto π_t il morfismo di scoppiamento $\widetilde{(S_t)} \to S_t$ lungo il punto chiuso $P_a = j_{A'}(p'(a))$, per le proprietà del cambio di base e per il lemma 7.1, si ha che X_a è il sottoschema di $\widetilde{(S_t)}$ definito dal nucleo del morfismo

$$\mathcal{O}_{S_t} \xrightarrow{\pi_t^\sharp} (\pi_t)_*(\mathcal{O}_{\widetilde{(S_t)}}) \longrightarrow (\pi_t)_*(\mathcal{O}_{\widetilde{(S_t)}}/\mathcal{I}_t).$$

Ma per l'ipotesi di induzione, $\tilde{X}_a$ è il sottoschema associato ad un insieme $\tilde{\mathbf{e}}_a$ di punti infinitamente vicini di $(\tilde{S_t})$, isomorfo ad $\mathbf{e}$ tramite un isomorfismo $\tilde{i} : \tilde{\mathbf{e}}_a \to \mathbf{e}$. Ma allora, per la proposizione 6.11, X_a è il sottoschema associato all'insieme $\mathbf{e}_a = (\pi_t)_* \tilde{\mathbf{e}}_a \cup \{P_a\}$. Considerando l'applicazione $i : \mathbf{e}_a \to \mathbf{e}$ data da

$$\begin{cases} i(Q) = \tilde{i}(Q) \text{ se } Q \in \tilde{\mathbf{e}}_a \\ i(P_a) = P \end{cases} ,$$

poiché per $Q \in \tilde{\mathbf{e}}_a$ si ha $Q \in (\tilde{D}_i)_t \iff Q \in (D_i)_t$ e $Q \lceil P_a \iff Q \in (\tilde{D}_0)_t$, è immediato verificare che i è un isomorfismo che verifica la condizione richiesta.

Proviamo (II). Dato t, il punto a' di $\mathbf{e}_t$ corrispondente a P, deve essere un punto chiuso di A' (per le condizioni sugli $\mathbf{e}_i$ e per la minimalità di P). Ora $\mathbf{e}_t - \{a'\}$ è un insieme di punti infinitamente vicini di $\widetilde{(S_t)} \cong (\widetilde{(S')_{a'}}) \cong (\tilde{S}')_{a'}$, che è isomorfo ad $\tilde{\mathbf{e}}$ tramite la restrizione dell'isomorfismo tra $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{e}_t$, e si ha che i punti corrispondenti ad $\tilde{\mathbf{e}}_i$ sono quelli di $(\tilde{D}_i)$ $(i \in \{0, \ldots, n\})$. Dunque per l'induzione possiamo applicare la proprietà (II) e trovare un punto $a \in A$ tale che $p'(a) = a'$ (e dunque $(f|_{A'} \circ p')(a) = t$), e tale che $\tilde{X}_a$ sia il sottoschema associato ad $\mathbf{e_t} - \{a'\}$. Infine, per la proposizione 6.11 e per le proprietà del cambio di base, X_a è il sottoschema associato ad $\mathbf{e}_t$, e questo conclude la dimostrazione.□

Corollario 7.5. *Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k, $\mathbf{e}$ un grafo di singolarità. Allora esiste uno schema A su k e dei sottoschemi X, X_1, …, X_m di $S \times_k A$ soddisfacenti le seguenti proprietà* (I) *e* (II)*.*

(I) *Per ogni punto chiuso $a \in A$ le fibre X_a e $(X_1)_a$, …, $(X_m)_a$ in a delle restizioni ad X e X_1, …, X_m della proiezione $\pi_A : S \times_k A \to A$, sono rispettivamente un sottoschema di annullamento e i sottoschemi di annullamento improprio su un insieme $\mathbf{e}_a$ di punti infinitamente vicini di S, che con la naturale struttura di grafo di Enriques, è isomorfo ad $\mathbf{e}$;*

(II) *se $\mathbf{e}'$ è un insieme isolato di punti infinitamente vicini di S che, con la naturale struttura di grafo di Enriques, è isomorfo ad $\mathbf{e}$, e X è un sottoschema di annullamento su $\mathbf{e}'$, allora esiste un punto chiuso $a \in A$ tale che $X_a = X$ e $(X_1)_a$, …, $(X_m)_a$ siano i sottoschemi di annullamento improprio su $\mathbf{e}'$.*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 7.4 con $T = \operatorname{Spec} k$, $n = 0$ e sostituire $\mathbf{e}$ con un ampliamento $\hat{\mathbf{e}}$, tramite $\iota : \mathbf{e} \to \hat{\mathbf{e}}$, tenendo presente che la funzione di molteplicità associata ad $\mathbf{e}$ è la composta della funzione di molteplicità associata ad $\hat{\mathbf{e}}$ e di ι. □

CAPITOLO VIII

Insiemi di divisori con assegnato tipo di singolarità

Definizione 8.1. Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k, con morfismo strutturale $f_S : S \to \operatorname{Spec} k$, D un divisore di S, $|D|$ ed $\mathcal{L}$ la serie lineare completa ed il fascio associati a D. Per [Hartshorne, capitolo II, paragrafo 7, proposizione 7.7] c'è una biezione tra $|D|$ e le classi di $\mathbf{P}(\mathcal{L}(S))$, che composta con l'applicazione $\mathbf{P}(\mathcal{L}(S)) = \mathbf{P}((f_S)_*\mathcal{L}(\operatorname{Spec}\ k)) \to \mathbf{P}((f_s)_*\mathcal{L})$ (cfr. osservazione 0.15), dà luogo ad un'applicazione $\sigma : |D| \to \mathbf{P}((f_s)_*\mathcal{L})$, che è una biezione sui punti chiusi del codominio: tale applicazione sarà detta *applicazione naturale* $|D| \to \mathbf{P}((f_s)_*\mathcal{L})$.

Definizione 8.2. Sia A uno schema, $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morfismo di fasci localmente liberi su A, $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to A$ la proiezione; sia poi ψ il morfismo ottenuto componendo il morfismo naturale $\pi^*\check{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)$ con $\pi^*\check{\varphi} : \pi^*\check{\mathcal{F}} \to \pi^*\check{\mathcal{E}}$. Per tensorizzazione per $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1)$, ψ dà luogo ad un morfismo $\pi^*\check{\mathcal{F}}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ la cui immagine, che è un fascio di ideali di $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$, sarà detto *fascio di ideali indotto* da φ su $\mathbf{P}(\mathcal{E})$.

Proposizione 8.3 *Sia k un campo algebricamente chiuso, $\mathcal{V}$ un fascio coerente (necessariamente libero di rango finito) su* Spec k*, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ un morfismo di fasci, $\mathcal{I}_V$ il fascio di ideali indotto da φ, V il sottoschema di $\mathbf{P}(\mathcal{V})$ definito da $\mathcal{I}_V$. Allora i punti chiusi di V sono tutti e soli i corrispondenti tramite il morfismo $\mathbf{P}(\mathcal{V}(\operatorname{Spec}\ k)) \to \mathbf{P}(\mathcal{V})$ delle classi contenute nel nucleo di $\varphi(\operatorname{Spec}\ k) : \mathcal{V}(\operatorname{Spec}\ k) \to \mathcal{W}(\operatorname{Spec}\ k)$.*

Dimostrazione. Sia $V = \mathcal{V}(\operatorname{Spec}\ k)$, $W = \mathcal{W}(\operatorname{Spec}\ k)$, $S = \operatorname{Sym}(\check{V})$. Il morfismo ψ associato a φ corrisponde tramite isomorfismi al morfismo ottenuto per fascificazione omogenea di

$$\check{W} \otimes_k S \to \check{V} \otimes_k S \to S(1),$$

la cui immagine è l'ideale omogeneo generato dalle funzioni lineari su V che si annullano su sul nucleo N del morfismo $\varphi(\operatorname{Spec}\ k) : V \to W$, dunque gli ideali omogenei-massimali contenenti tale ideale sono esattamente i corrispondenti tramite $\mathbf{P}(\mathcal{V}(\operatorname{Spec}\ k)) \to \mathbf{P}(\mathcal{V})$ delle classi contenute in N. □

Corollario 8.4. *Sia X un sottoschema chiuso di una superficie liscia S su un campo algebricamente chiuso k, con morfismo strutturale $f_S : S \to \operatorname{Spec}\ k$, $i : X \to S$ una immersione di X, D un divisore di S , $|D|$ ed $\mathcal{L}$ la serie lineare completa e il fascio associati a D, e $\sigma : |D| \to \mathbf{P} := \mathbf{P}((f_S)_*\mathcal{L})$ l'applicazione naturale. Allora i punti chiusi del sottoschema V di $\mathbf{P}$ definito dal fascio di ideali indotto dal morfismo $(f_S)_*g$ con g ottenuto dalla composizione*

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{L}} \otimes i^\sharp} \mathcal{L} \otimes i_*\mathcal{O}_X,$$

dove $\mathcal{O}_S$ e $\mathcal{O}_X$ sono i fasci strutturali, è l'immagine tramite σ dei divisori di $|D|$ che passano per X.

Dimostrazione. Discende subito dalla proposizione 8.3 e dall'osservazione 0.15. $\square$

Proposizione 8.5. *Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k, con morfismo strutturale $f_S : S \to \operatorname{Spec} k$, A uno schema su k, D un divisore di S, $|D|$ ed $\mathcal{L}$ la serie lineare completa e il fascio associati a D, e $\sigma : |D| \to \mathbf{P} := \mathbf{P}((f_S)_*\mathcal{L})$ l'applicazione naturale. Allora esiste uno schema $\mathbf{P}_A$, un morfismo $\pi : \mathbf{P}_A \to A$ e un morfismo $p : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}$ tali che i punti chiusi $P \in \mathbf{P}_A$ siano in corrispondenza biunivoca con le coppie del tipo (a, D_P), con $a = \pi(P)$ e $D_P \in |D|$ tale che $\sigma(D_P) = p(P)$. Se inoltre X è un sottoschema chiuso di $S \times_k A$, piatto su A, allora esiste un sottoschema chiuso V di $\mathbf{P}_A$ tale che i punti chiusi di V siano tutti e soli i corrispondenti delle coppie (a, D_P) tali che D_P passi per la fibra X_a.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_X$ i fasci strutturali rispettivamente su $S \times_k A$ e su X, $i : X \to S \times_k A$ una immersione di X, π_S e π_A le proiezioni di $S \times_k A$, poniamo poi $\mathcal{F} = \pi_S^*\mathcal{L}$, e definiamo ι come il morfismo dato dalla seguente composizione

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}} i^\sharp} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} i_*\mathcal{O}_X.$$

Detto $f_A : A \to \operatorname{Spec} k$ il morfismo strutturale di A, si ha un isomorfismo naturale $(\pi_A)_*\mathcal{F} \cong f_A^*(f_S)_*\mathcal{L}$, e poiché $(f_S)_*\mathcal{L}$ è libero di rango finito, $(\pi_A)_*\mathcal{F}$ è libero di rango finito, dunque poniamo $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}((\pi_A)_*\mathcal{F})$ e definiamo $p : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}$ come il morfismo indotto da f_A. Poiché $\mathcal{F}$ è libero, $\mathbf{P}_A$ è isomorfo a $\mathbf{P} \times_k A$ e p corrisponde tramite tale isomorfismo alla proiezione su $\mathbf{P}$. Poiché in uno schema T su un campo algebricamente chiuso un punto è chiuso se e solo se è razionale su k, e poiché i punti razionali su k corrispondono biunivocamente ai morfismi $\operatorname{Spec} k \to T (\to \operatorname{Spec} k)$ che inducono l'identità su $\operatorname{Spec} k$, si ha che l'immagine di un punto chiuso tramite un morfismo di schemi su k è ancora un punto chiuso, e per la proprietà universale del prodotto fibrato, un punto chiuso P di $\mathbf{P} \times_k A$ è individuato da $p_A(P)$ e $p_{\mathbf{P}}(P)$, dove $p_{\mathbf{P}}$ e p_A sono le proiezioni di $\mathbf{P} \times_k A$. Dunque, dato che la proiezione naturale $\pi : \mathbf{P}_A \to A$ corrisponde a p_A, e p a $p_{\mathbf{P}}$, posto $D_P = \sigma^{-1}(p(P))$ resta provato l'asserto relativo ai punti chiusi di $\mathbf{P}_A$.

Sia ora $\mathcal{I}_V$ il fascio di ideali su $\mathbf{P}_A$ indotto dal morfismo $(\pi_A)_*\iota$ e V il sottoschema chiuso da esso definito. Dimostriamo che V ha la proprietà enunciata. Sia come prima P un punto chiuso di $\mathbf{P}_A$, $a = \pi(P)$, $D_P = \sigma^{-1}(p(P))$, e sia $f_a : \operatorname{Spec} k \to \mathbf{P}_A$ il morfismo corrispondente ad a. Dette S_a ed X_a le fibre in a di π e $\pi|_X = \pi \circ i$, detto i_S il morfismo $S \cong S_a \to S \times_k A$ e detta infine i_a l'immersione chiusa naturale $X_a \to S$, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
X_a \arrow[r] \arrow[d, "i_a"] & X \arrow[d, "i"] & \\
S \arrow[r, "i_S"] \arrow[d, "f_S"] & S \times_k A \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[d, "\pi_A"] & S \arrow[d, "f_S"] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r, "f_a"] & A \arrow[r, "f_A"] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd} ,$$

in cui tutti i quadrati componenti sono di pull-back (cioè corrispondono tramite isomorfismi al diagramma di prodotto fibrato), e in cui le composizioni $S \xrightarrow{i_S} S \times_k A \xrightarrow{\pi_S} S$ e $\mathrm{Spec}\, k \xrightarrow{f_a} A \xrightarrow{f_A} \mathrm{Spec}\, k$ sono le identità rispettivamente di S e $\mathrm{Spec}\, k$. Il morfismo f_a induce un morfismo $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}_A$, e il fascio $f^{-1}\mathcal{I}_V \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ (con $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ fascio strutturale di $\mathbf{P}$) è il fascio indotto dal morfismo $f_a^*(\pi_A)_*\iota$; e per le proprietà del cambio di base, tenendo conto che X è piatto su A, tale morfismo corrisponde tramite isomorfismi naturali a $(f_S)_*(\iota_a)$ con ι_a dato dalla composizione

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_S} i_a^\sharp} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} (i_a)_*\mathcal{O}_{X_a},$$

dove $\mathcal{O}_S$ e $\mathcal{O}_{X_a}$ sono i fasci strutturali. Per il corollario 8.4, i punti chiusi della fibra V_a di V, che è il sottoschema definito da $f^{-1}\mathcal{I}_V \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$, sono tutte e sole le immagini tramite σ dei divisori che passano per X_a. Dunque, dato che $P \in V$ se e solo se $p(P) \in V_a$, otteniamo che $P \in V$ se e solo se $D_P = \sigma^{-1}(p(P))$ passa per X_a, come volevamo. $\square$

Definizione 8.6. Nella situazione della proposizione 8.5, diciamo che V è la *varietà di incidenza* relativa a (X, D).

Teorema 8.7. *Sia S una superficie liscia su un campo algebricamente chiuso k, con morfismo strutturale $f_S : S \to \mathrm{Spec}\, k$; sia D un divisore di S, $|D|$ e $\mathcal{L}$ la serie lineare completa e il fascio associati a D, $\sigma : |D| \to \mathbf{P} := \mathbf{P}((f_S)_*(\mathcal{L}))$, l'applicazione naturale,* $\mathbf{e}$ *un grafo di singolarità, e infine sia $|D|_{\mathbf{e}}$ l'insieme dei divisori di $|D|$ con configurazione di singolarità isomorfa ad* $\mathbf{e}$*. Allora $\sigma(|D|_{\mathbf{e}})$ è l'insieme dei punti chiusi di un sottoinsieme costruibile di* $\mathbf{P}$*.*

Dimostrazione. Per il corollario 7.5, esiste uno schema A su k e dei sottoschemi X, X_1, ..., X_m di $S \times_k A$ soddisfacenti le seguenti condizioni (I) e (II).

(I) Per ogni punto chiuso $a \in A$ le fibre X_a e $(X_1)_a, \dots, (X_m)_a$ in a delle restrizioni ad X e $X_1, \dots, X_m$ della proiezione $\pi_A : S \times_k A \to A$, sono rispettivamente un sottoschema di annullamento e i sottoschemi di annullamento improprio su un'insieme $\mathbf{e}_a$ di punti infinitamente vicini di S, che con la naturale struttura di grafo di Enriques è isomorfo ad $\mathbf{e}$;

(II) se $\mathbf{e}'$ è un insieme isolato di punti infinitamente vicini di S che, con la naturale struttura di grafo di Enriques, è isomorfo ad $\mathbf{e}$, e X è un sottoschema di annullamento su $\mathbf{e}'$, allora esiste un punto chiuso $a \in A$ tale che $X_a = X$ e $(X_1)_a, \dots, (X_m)_a$ siano i sottoschemi di annullamento improprio su $\mathbf{e}'$.

Analogamente, per la proposizione 7.2, detto m il numero dei punti minimali di $\mathbf{e}$, esiste uno schema A' su k e un sottoschema X' di $S \times_k A'$ tale che per ogni punto chiuso a' di A' la fibra $X'_{a'}$ è uno schema associato ad $m+1$ punti multipli e ogni schema associato ad $m+1$ punti multipli è una fibra $X'_{a'}$ per qualche punto chiuso $a' \in A'$.

Siano ora $V, V_1, \dots, V_m \subseteq \mathbf{P}_A$ e $V' \subseteq \mathbf{P}_{A'}$ le varietà di incidenza relative a (X, D), (X_1, D), ..., (X_m, D) e (X', D), e siano $p : \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}$ e $p' : \mathbf{P}_{A'} \to \mathbf{P}$ le proiezioni. Poiché i chiusi sono costruibili, poichè la classe dei sottoinsiemi costruibili è chiusa per differenza, e poiché infine l'immagine di un insieme costruibile è costruibile, l'insieme $p(V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)) - p'(V')$ è costruibile: ci basta allora dimostrare che l'insieme dei punti chiusi di $p(V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)) - p'(V')$ è uguale a $\sigma(|D|_{\mathbf{e}})$.

Cominciamo ad osservare che i punti chiusi fuori da $p'(V')$ sono tutti e soli i corrispondenti tramite σ di divisori con al più m punti multipli. Infatti, se un tale punto chiuso Q fosse uguale a $\sigma(D')$ con D' divisore avente più di m punti multipli, D' si annullerebbe su uno schema $X'_{a'}$ per qualche $a' \in A'$, e per la proposizione 8.5 il punto $P \in \mathbf{P}_{A'}$, corrispondente alla coppia (a', D') apparterrebbe a V' e si avrebbe $p'(P) = Q$, mentre Q è fuori da $p'(V')$; se, viceversa, $Q \in p'(V')$ allora Q è immagine tramite p' di un punto P, che, sempre per la proposizione 8.5, corrisponderebbe ad una coppia (a', D_P) tale che D_P ha più di m punti multipli.

Analogamente, un punto chiuso Q di $p(V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)) - p'(V')$ è del tipo $p(P)$ con P punto chiuso di $V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)$. Per la proposizione 8.5, a P corrisponde una coppia (a, D_P) tale che $Q = p(P) = \sigma(D_P)$ ed inoltre $P \in V$ se e solo se D_P passa per X_a ma non per $(X_1)_a$, …, $(X_m)_a$; quest'ultima condizione, dato che D_P ha al più m punti multipli (perché $Q \notin p'(V')$), per la proposizione 6.15 e la condizione (I), equivale a dire che la configurazione di singolarità di D_P è $\mathbf{e}_a$. Dunque $Q \in p(V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)) - p'(V')$ se e solo se esistono un punto chiuso a di A e un divisore $D_P \in |D|$ tali che $\sigma(D_P) = Q$ e la configurazione di singolarità di D_P è $\mathbf{e}_a$: il "solo se" è immediato, per quanto appena detto, mentre per il "se" basta osservare che se $Q = \sigma(D_P)$, con D_P avente configurazione di singolarità $\mathbf{e}'$ isomorfa ad $\mathbf{e}$, allora per (II) esiste a tale che $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}'$ (e in particolare quindi D_P ha solo m punti multipli).

In definitiva $Q \in p(V - (V_1 \cup \cdots \cup V_m)) - p'(V')$ se e solo se $Q \in \sigma(|D|_{\mathbf{e}})$, come volevamo. □

[Abhyankar] Abhyankar, S. S., On the valuations centered in a local domain. Amer. J. Math. 78 (1956).

[Atiyah-Macdonald] Atiyah, M.F., Macdonald, I.G., Introduzione all'algebra commutativa. Coll. di mat. 16, Feltrinelli, Milano (1981).

[Arbarello-Cornalba] Arbarello E., Cornalba M., Footnotes to a paper of Beniamino Segre, Math. Ann., (1981), 341–362.

[Berge] Berge, C., Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris (1970).

[Brill-Noether] Brill, A., Noether, M., Uber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendungen in der Geometrie. Math. Ann. 7 (1873), 269–310.

[Briançon] Briançon, J., Description de Hilb^n $\mathbf{C}\{x,y\}$. Invent. Math. 41 (1977), 45-89.

[Brun-Hirschowitz] Brun, J., Hirschowitz, A., Brill-Noether pour les idéaux de $\mathbf{P}^2$. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^a série, t. 20, 1987, 171-200.

[Ciliberto] Ciliberto, C., Curve algebriche proiettive: risultati e problemi. Atti del convegno nazionale del G.N.S.A.G.A. del C.N.R., Torino, 4-6 Ottobre 1984.

[Enriques-Chisini] Enriques, F., Chisini, O., Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Zanichelli, Bologna 1924.

[Grothendieck-Dieudonné] Grothendieck, A., Dieudonné, J.A., Eléments de Géométrie Algebrique, I. Grundlehren 166, Springer-Verlag, Heidelberg (1971).

[Harris] Harris, J., On the Severi problem. Invent. Math. 54 (1986), 445–461.

[Hartshorne] Hartshorne, R., Algebraic Geometry. GTM 52, Springer Verlag, Heidelberg 1977.

[Mac Lane] Mac Lane, S., Categorie nella pratica matematica. Serie di logica matematica, Boringhieri, Torino 1977.

[Matsumura] Matsumura, H., Commutative algebra, W.A. Benjamin Co., New York, 1970.

[Severi] Severi, F., Vorlesungen uber Algebraische Geometrie. Teubner, Leipzig, 1921.

[Tannenbaum] Tannenbaum, A., Families of algebraic curves with nodes, Compositio math. 41 (1980), 107–126.

[Wahl] Wahl, J., Deformations of plane curves with nodes and cusps. Amer. J. Math. 96 (1974), 529-577.

[Zariski] Zariski, O., Algebraic Surfaces, 2° suppl. ed., Ergebnisse 61, Springer-Verlag, Heidelberg (1971).

[Zariski2] Zariski, O., The reduction of the singularities of an algebraic surface. Ann. of Math. 40 (1939).

[Zariski3] Zariski, O., Foundation of a general theory of birational correspondences. Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943).

[Zariski4] Zariski, O., Dimension-theoretic characterization of maximal irreducible algebraic systems of plane nodal curves of a given order n and with a given number d of nodes. Amer. J. Math. 104 (1982), 209–226.

[Zariski-Samuel] Zariski, O., Samuel, P., Commutative Algebra (Vol. II). GTM 29, Springer-Verlag, Heidelberg.