Università degli Studi di Napoli Federico II
Scuola delle Scienze Umane e Sociali
Quaderni
1

STUDI E RICERCHE DI SCIENZE UMANE E SOCIALI

a cura di ROBERTO DELLE DONNE

Prefazione di LUCIO DE GIOVANNI

Federico II Open Access University Press

fedOAPress

Università degli Studi di Napoli Federico II
Scuola delle Scienze Umane e Sociali
Quaderni
1

Studi e ricerche di scienze umane e sociali

a cura di Roberto Delle Donne

Prefazione di Lucio De Giovanni

Federico II Open Access University Press

fedOAPress

Studi e ricerche di scienze umane e sociali / a cura di Roberto Delle Donne. –
Napoli : FedOAPress, 2014. – (Scuola di Scienze Umane e Sociali. Quaderni ;
1).

Accesso alla versione elettronica:
http://www.fedoabooks.unina.it

ISBN: 978-88-6887-002-7
DOI: 10.6093/978-88-6887-002-7

Si ringraziano i dottori Mariarosalba Angrisani, Vincenzo De Luise, Nicola Madonna e Lucia Mauro per il loro prezioso contributo nella raccolta e nell'editing redazionale degli articoli.

Università degli Studi di Napoli Federico II
Centro di Ateneo per le Biblioteche "Roberto Pettorino"
Piazza Bellini 59-60
80138 Napoli, Italy
http://www.fedoapress.unina.it/

Published in Italy

Indice

Economia e società

Storia e cultura

Modelli attuariali per la determinazione del premio di coperture assicurative sulla salute

Elena Cardona*

Abstract: In this paper I deal with the matter related to the growth of insurance coverage costs for medical expenses and hospitalization costs, including surgical operation, in relation to the health insurance claim. The costs dynamics is analysed with reference to the normal risks, taking into consideration the total yearly costs of every policyholder, sum of all claim costs. From the sum of the costs of each single episode of illness, two moltiplicative models are formulated which reduce the variation of costs to two factors: the first summing up the subsequent effects of the aging of the policyholder; the second, those deriving from the passing time. The annual adjustment of interest rate, to be estimated appropriately, quantifies the growth of costs connected to such variables.

Beside the dynamics of ordinary costs, I also examine a more general model in which I tackle the effects of permanent illness taking place after the drawing up of the contract, causing a decline in the general state of health and a sudden increase in the primary costs considered in function of age and current time. Consequently, the single elements of the cost matrixes, correlated respectively to medical and hospitalization costs, should be substituted with diversified elements according to the pathology in course. Let us consider n diseases which have in general 2^n system states and the same number of cost matrixes in function of age and passing time. In this context, the dynamics following the uncertainty on the variations in the disease package for a client to be considered, gives place to a markovian homogeneous stochastic process.

In order to consider the consequences of the above-mentioned costs growth to calculate the premiums per annum of a many years contract, in reference to a sample year of observation, an adjustment system is adopted which keeps track of both ordinary costs variations due to an increase in the sickness-rate and monetary inflation, and of the extraordinary variations due to modifications in disease system state. I then examine a many years contract as we have considered previously and the consequences of the evolution costs on the trend of the annual premiums are taken into consideration.

A numerical example referring to the case of three permanent illnesses concludes the paper.

Keywords: Illness insurances; Medical expenses; Hospitalization costs; Markov models

1. *Introduzione*

Con la locuzione “assicurazioni sulla salute” viene designato un vasto ed articolato insieme di coperture assicurative, volte a coprire un individuo dal

* Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cinthia, 80126 Napoli, Italy. E-mail: cardona@unina.it.

"rischio" derivante dall'aleatorietà insita nello stato di salute di una persona. Rientrano in tali assicurazioni le coperture per malattia: in esse, al verificarsi di alterazioni del normale stato di salute dell'assicurato per malattia, e dunque, a fronte di bisogni derivanti dall'impossibilità dell'assicurato di svolgere la propria attività lavorativa, o dalla necessità di sostenere spese mediche, di ricovero, o di riabilitazione, è previsto l'intervento dell'istituto assicuratore.

Nonostante la mancanza di una visione unitaria delle forme assicurative sulla salute in Italia (ma anche in altri Paesi), derivante, probabilmente, da una loro frammentazione a livello gestionale, ma anche a livello giuridico e tecnico-attuariale, tra i Rami Vita e i Rami Danni, sul piano commerciale si può notare, una sempre più rilevante offerta di "pacchetti previdenziali" che abbinano assicurazioni sulla durata di vita (e a volte anche prodotti prettamente finanziari) con polizze sulla salute.

Le assicurazioni sulla salute, insieme alle "assicurazioni sulla durata di vita" e ad altre previdenze assicurative quali quelle sulla nuzialità, natalità e studio e avviamento professionale dei figli, costituiscono l'insieme delle cosiddette "assicurazioni di persone"; restano invece escluse da tale settore le coperture riguardanti attività svolte dalla persona, quali, ad esempio le assicurazioni di responsabilità civile.

In questo lavoro, nell'ambito delle "assicurazioni malattia", e nello specifico per le coperture "rimborso spese mediche" e "rimborso spese di degenza ospedaliera, viene approfondita la dinamica dei costi connessi alle suddette spese, esaminando le cause di variazione dei costi oggetto di prestazione assicurativa in relazione al sinistro "malattia".

Ai fini del calcolo del premio equo, prendiamo in considerazione un contratto in base al quale un assicurato, il quale in un istante del periodo temporale coperto dalla polizza sia ricoverato per malattia in una struttura sanitaria, venga rimborsato dalla Compagnia di assicurazione per le spese sostenute, distinguendo tra le seguenti due tipologie di costi:

i) per spese mediche, comprese quelle per interventi chirurgici;
ii) per spese di degenza ospedaliera sulla base di una diaria prefissata in maniera forfettaria.

Allo scopo di formalizzare il processo stocastico conseguente consideriamo per un generico assicurato i dati seguenti:

$C^{(M)}$ = costo totale in un periodo annuale per spese mediche,

$C^{(D)}$ = costo totale in un periodo annuale per spese di degenza,

esaminando le caratteristiche della loro evoluzione che, di solito, ha un andamento crescente. Tali costi totali di periodo sono somma dei costi relativi ai singoli episodi di morbilità.

È noto che, per una prefissata età dell'assicurato, le cause di variazione dei suddetti costi cui sono riferite le prestazioni dell'assicuratore, sono le seguenti:

i) aumento dei costi medico-sanitari causato dall'inflazione;
ii) variazione della sinistrosità attesa fra gli assicurati;
iii) variazione delle probabilità di sopravvivenza a seguito di adozione di diverse basi demografiche;
iv) variazione del costo della diaria ospedaliera per adeguamento al costo vita e/o al reddito dell'assicurato.

Come è d'uso, si trascurano i fattori ii) e iii) all'interno dell'arco temporale di validità di un contratto e pertanto rimangono da considerare i fattori i) e iv) che insieme concorrono agli effetti connessi alle variazioni dei prezzi dovute alle cause macroeconomiche.

Occorre altresì considerare, fra le cause di variazione dei costi, quelle connesse all'aggravamento naturale della morbilità ed alla crescente gravità delle malattie in conseguenza dell'aumento dell'età.

Pertanto, per semplicità di trattazione, assumeremo un modello moltiplicativo, che riconduce le variazioni dei costi a due fattori:

a) il primo riassume tutti gli effetti conseguenti al crescere dell'età dell'assicurato;
b) il secondo riassume quelli conseguenti al procedere del tempo corrente.

Le due variabili del modello, età e tempo corrente, sono rigidamente collegate differendo solo per una costante. Le evoluzioni dei costi per spese mediche e per degenza ospedaliera connessi a tali variabili saranno quantificate da tassi annui di adeguamento, generalmente variabili.

2. *Il processo stocastico del costo e la dinamica dei valori attesi*

Ai fini della valutazione dei valori medi che interessano per il calcolo dei premi, viene qui esaminato il processo stocastico del costo totale di periodo a partire dall'epoca z_0 di ingresso in assicurazione, distinguendo tra il rimborso per spese mediche e quello per diaria di ricovero, dando come condizione iniziale il costo al tempo z_0 di ingresso in assicurazione, riferito ad un generico assicurato di età x_0.

Tale costo totale per ciascun assicurato è evidentemente somma di un numero aleatorio di costi aleatori relativi ai singoli "sinistri"(= episodi di morbilità).

Va precisato che:

a) per costo si intende l'esborso a carico dell'assicuratore dovuto al risarcimento dei danni connesso al sinistro;
b) si suppone la mutua indipendenza fra i costi dei sinistri relativi ad una polizza, e tra ciascuno di essi e il numero aleatorio dei medesimi sinistri.

Peraltro non ci soffermeremo sulla determinazione delle distribuzioni dei singoli costi aleatori e dei conseguenti costi totali di polizza per ciascun esercizio. Piuttosto, ci occuperemo soltanto dell'evoluzione dei valori medi dei costi totali mediante due modelli, i cui parametri possono ottenersi mediante stime ed interpolazioni su dati statistici del settore sanitario. I costi al tempo di stipula del contratto, assunto come iniziale, si considerano assegnati in conseguenza di apposite rilevazioni, per cui tutta la dinamica dei costi attesi complessivi viene valutata deterministicamente.

Consideriamo dapprima il modello relativo ai costi annui su singola testa assicurata per rimborso di spese mediche. Poniamo:

z = tempo corrente;
x = età dell'assicurato al tempo z;
z_0 = anno di stipula del contratto,
x_0 = età all'ingresso in assicurazione,
$u^{(M)}$ = tasso di adeguamento dovuto all'aumentare dell'età;
$w^{(M)}$ = tasso di adeguamento dovuto alla variazione dei prezzi connessi alle spese mediche.

Risulta ovviamente: $z - z_0 = x - x_0$.

Assumiamo poi:

- il tasso $w^{(M)}$ costante nel tempo, eventualmente ottenuto come opportuna media di tassi variabili ricavati o proiettati da basi statistiche
- il tasso $u_x^{(M)}$ funzione esponenziale crescente dell'età x, ponendo

$$(2.1) \qquad u_x^{(M)} = b^{(M)}\, e^{\, r^{(M)} \cdot x}$$

in riferimento all'intervallo $(x, x+1)$.

In (2.1) i valori parametrici $b^{(M)}$ e $r^{(M)}$ risultano determinati imponendo le condizioni agli estremi:

$$u_{x_0}^{(M)} = u_0^{(M)} \quad ; \quad u_{x_{0+t_0}}^{(M)} = u_1^{(M)} \quad ; \quad u_1^{(M)} = u_0^{(M)}$$

con:

t_0 = durata del contratto assicurativo; $u_0^{(M)}$ = valore osservato in x_0; valore osservato in $x_0 + t_0$.

Risulta:

$$b^{(M)} = u_0^{(M)} \left(u_0^{(M)} / u_1^{(M)} \right)^{x_0 / t_0} < u_0^{(M)}$$

$$r^{(M)} = \left[\ln \left(u_1^{(M)} / u_0^{(M)} \right) \right] / t_0$$

In conseguenza di tali posizioni, il costo atteso pro-capite per una testa assicurata di età x al tempo z è dato da

$$\text{(2.2)} \qquad C_{x,z}^{(M)} = C_0^{(M)} \left[1 + w^{(M)} \right]^{x - x_0} \prod_{y=x_0}^{x-1} \left[1 + b^{(M)} e^{r^{(M)} \cdot y} \right]$$

dove $C_0^{(M)} = C_{x_0, z_0}^{(M)}$ è l'analogo costo nell'anno z_0 di stipula.

Il rapporto $C_{x,z}^{(M)} / C_0^{(M)}$ ricavato da (2.2) esprime il fattore di adeguamento complessivo $1 + \lambda^{(M)}(x_0, x)$ nel periodo da x_0 a x, dovuto sia all'età che alle variazioni monetarie.

Ricordando (2.1) e posto:

$1 + \hat{u}^{(M)}$ = media geometrica dei fattori annui $\left[1 + u_y^{(M)} \right]$ di variazione conseguente all'età

$1 + \hat{\lambda}^{(M)}$ = media geometrica dei fattori annui $\left[1 + \lambda^{(M)} \right]$ di variazione complessiva

vale la relazione

$$\text{(2.3)} \qquad 1 + \hat{\lambda}^{(M)} = \left(1 + w^{(M)} \right) \left(1 + \hat{u}^{(M)} \right)$$

nonchè

$$\text{(2.4)} \qquad C_{x,z}^{(M)} / C_0^{(M)} = \left[1 + \lambda^{(M)}(x_0, x) \right] = \left(1 + \hat{\lambda}^{(M)} \right)^{x - x_0}$$

la quale esprime il trend dei costi attesi in relazione ai diversi tassi di variazione.

Nella pratica, con tassi annui di piccola entità vale l'uguaglianza approssimata per difetto

(2.5) $\hat{\lambda}^{(M)} = w^{(M)} + \hat{u}^{(M)}$

Anche in riferimento ai costi per spese di degenza ospedaliera, possiamo formalizzare il processo stocastico del costo oppure limitarci alla dinamica dei costi attesi $C^{(D)}_{x,z}$. Con ipotesi analoghe a quelle adottate per le spese mediche, abbiamo le seguenti formulazioni, riferite ai tassi $w^{(D)}$, $\lambda^{(D)}(x_0,x)$, $\left\{u_y{}^{(D)}\right\}$
da cui si ricava $\hat{u}^{(D)}$.

Con ovvio significato dei simboli si ottiene dunque

(2.1') $u_x{}^{(D)} = b^{(D)}\, e^{\, r^{(D)} x}$

(2.2') $C^{(D)}_{x,z} = C^{(D)}_0 \left[1 + w^{(D)}\right]^{x-x_0} \prod_{y=x_0}^{x-1} \left[1 + b^{(D)} e^{\, r^{(D)} \cdot y}\right]$

(2.3') $1 + \hat{\lambda}^{(D)} = \left(1 + w^{(D)}\right)\left(1 + \hat{u}^{(D)}\right)$

(2.4') $C^{(D)}_{x,z} / C^{(D)}_0 = \left[1 + \lambda^{(D)}(x_0, x)\right] = \left(1 + \hat{\lambda}^{(D)}\right)^{x-x_0}$

(2.5') $\hat{\lambda}^{(D)} = w^{(D)} + \hat{u}^{(D)}$

Nei precedenti sviluppi la determinazione dei parametri e quindi in particolare quella dei tassi medi $w_y{}^{(M)}$ e $w_y{}^{(D)}$ nonché delle sequenze $\left\{u_y{}^{(M)}\right\}$ e $\left\{u_y^{(D)}\right\}$ va effettuata mediante stime statistiche con procedimenti specificati nel successivo §3. Ciò comporta ovviamente una estrapolazione al futuro di stime fondate su osservazioni del passato, effettuata in modo da tener conto della tendenza e non soltanto dei valori di posizione.

Segue ora una osservazione che conduce ad una variante nell'adeguamento dei premi.

I tassi annui di adeguamento complessivo, ricavabili dalle formule precedenti, possono essere positivi e di misura così elevata da risultare insostenibili per un assicurato che, col procedere dell'età, può avere riduzioni di reddito. Dato che gran parte dell'aumento può essere dovuto all'inflazione, che nei tempi correnti non scende mai in pratica nel medio periodo sotto un certo livello, allora è buona politica per l'assicuratore proporre all'assicurato nei contratti pluriennali un premio annuo adeguato per gli effetti dell'età e dell'eccedenza di inflazione effettiva rispetto a quella corrispondente a un tasso $\underline{w}$, prefissato in z_0 , con l'obbiettivo: $\underline{w} < \min_z w_z$, $\left(z_0 \le z \le z_0 + t_0\right)$.

Per tener conto anche della quota d'inflazione al tasso $\underline{w}$, occorre maggiorare il premio annuo iniziale in modo tale che il nuovo valore realizzi l'equivalenza finanziaria tra i flussi di premio non modificati e con adeguamento al lordo dell'inflazione al tasso $\underline{w}$ e quelli modificati ma con adeguamento al tasso $w - \underline{w}$. Per evitare un eccessivo divario tra premi originari e quelli modificati quando la durata contrattuale è molto lunga, la correzione può essere fatta ripartendo l'arco temporale in sottoperiodi pluriennali e ripetendo la correzione all'inizio di ciascuno di essi.

Adottando il tasso tecnico η per le valutazioni e le attualizzazioni, il premio annuo maggiorato P^* che, se applicato costantemente per m anni, dà una prestazione equivalente a quella del premio iniziale P adeguato successivamente al solo tasso $\underline{w}$, si ricava risolvendo l'equazione

$$(2.6) \qquad P^* \, a(m,\eta) = P \, a(m,\rho)$$

dove si ponga:

$$a(m, \xi) = [1-(1+\xi)^{-m})/ \xi \; ; \; \rho = (1+\eta)/(1+\underline{w}) - 1 < \eta \; ,$$

per cui risulta $P^* > P$.

Pertanto l'adeguamento dei premi annui alla dinamica dei costi attesi ai tassi annui medi

$$\hat{\lambda}^{(M)} \text{ o } \hat{\lambda}^{(D)}$$

si riottiene adeguando P^* con i procedimenti precedenti ma limitati agli effetti dell'età e dell'eventuale eccedenza del tasso di inflazione rispetto a $\underline{w}$.

3. *L'approccio statistico in assenza di tare specifiche*

3.1 *L'analisi delle quote danni*

Ai fini della stima per via statistica dei parametri di tasso definiti in (2.4) e (2.4'), conviene analizzare la struttura evolutiva dei costi pro-capite per spese mediche o di degenza ospedaliera, conseguenti ad occasionali patologie, con esclusione di quelle gravi che danno luogo a rischi tarati (es: diabete, tumori, insufficienze polmonari, cardiache o cerebrali, etc.). Di questi ultimi e della conseguente generalizzazione dei modelli ci occuperemo nel successivo § 4.

I costi dei sinistri connessi a rischi non tarati, specificati nei modelli del § 2 come trend dei valori attesi, saranno qui determinati come *quote-danni* annue per singola polizza, con riferimento ad un portafoglio omogeneo, ottenuto stimando le quote-danni al tempo z_0 e tenendo conto di tutte le informazioni sia di tipo macroeconomico che medico sanitario, atte a stimare i tassi di variazione dei fattori di costo correlati al tempo corrente o all'età degli assicurati, preliminarmente distinti per sesso.

In questo contesto la quota-danni è intesa come valore medio di dati empirici, valido per la sua utilizzazione come premio assicurativo.

Esprimendo le quote-danni in funzione delle loro componenti otteniamo:

i) *per spese mediche*

(3.1) $Q^{(M)} = \varphi \cdot c$.

dove φ è il numero atteso di sinistri pro-capite, c il costo atteso per sinistro.

ii) *per diaria di ricovero*

(3.1') $Q^{(D)} = \psi \cdot b \cdot g$

dove ψ è il numero atteso di sinistri pro-capite, b la diaria giornaliera, g il numero atteso di giorni di degenza, per il settore "spese di degenza ospedaliera", per cui $b \cdot g$ è il costo atteso di un ricovero in ospedale o casa di cura.

In concreto va osservato che gli *indici di sinistrosità* possono farsi dipendere soltanto dall'età e non dal tempo corrente, almeno negli intervalli temporali di validità della polizza, mentre i costi di diaria possono farsi dipendere solo dal tempo corrente, e il numero medio di giorni di ricovero soltanto dall'età. Pertanto le matrici dei costi, qualora siano disponibili per ciascuna età e per ciascun anno solare, possono indicarsi con

(3.2) $\left\| Q^{(M)}{}_{x,z} \right\|$; $\left\| Q^{(D)}{}_{x,z} \right\|$

rispettivamente per spese mediche e di degenze ospedaliere avendo posto

(3.3) $Q^{(M)}{}_{x,z} = \varphi_x \cdot c_{x,z}$. ; $Q^{(D)}{}_{x,z} = \psi_x \cdot b_z \cdot$; $\forall\, x, z$

Le matrici in (3.2) esprimono i costi relativi ad una collettività stazionaria. Peraltro, se si seguono quelli con riferimento ad una singola persona assicurata, è evidente che al trascorrere di un anno solare aumenta di un anno anche l'età, per cui nella matrice dei costi occorre procedere lungo una diagonale NW-SE, passando cioé da $\varphi_x\, c_{x,z}$ a $\varphi_{x+1}\, c_{x+1,z+1}$ con riferimento alle spese mediche, e da $\psi_x\, b_z\, g_x$ a $\psi_{x+1}\, b_{z+1}\, g_{x+1}$ con riferimento alle spese di diaria.

In conclusione, se si dispone degli elementi di costo sintetizzati nelle matrici (3.2) distintamente per ciascuna età ed anno solare in opportuni intervalli, questi stessi elementi già consentono, attraverso idonee perequazioni ed adattamenti al nostro schema teorico, di determinare i parametri inerenti alla dinamica dei costi che sono formalizzati nei modelli del § 2.

3.2. *Una procedura di stima dei tassi*

Svilupperemo ora una procedura atta ad individuare i parametri di tasso sopra specificati nell'ipotesi che sia disponibile solo una parte dell'informazione statistica. Si rimedia a tale carenza tenendo conto delle informazioni che si possono dedurre dalle caratteristiche delle funzioni assunte nei modelli del § 2.

Supponiamo pertanto disponibili mediante "censimento", per tempi ed età prefissate, tutti i dati occorrenti per determinare i singoli fattori φ_x , $c_{x,z}$, ψ_x , b_z , g_x dei prodotti in (3.3). Con tali elementi procederemo ordinatamente ad una stima dei tassi annui di variazione dei predetti fattori, singolarmente considerati, modellizzando la forma esponenziale per quelli dipendenti da x e assumendo costanti quelli dipendenti da z.

In tal modo è possibile:

- costruire dati stimati per gli elementi delle matrici (3.2) se mancano quelli effettivi
- determinare per aggregazione le stime dei tassi di variazione dei costi complessivi da inserire in (2.4) e (2.4'),

dando così soluzione al problema considerato.

Applichiamo la procedura ai fattori al secondo membro di (3.3):

a) *indice di sinistrosità* φ_x *per spese mediche (M)*

Supponiamo di conoscere tale indice per l'età (intera) x_0 nonché per due età consecutive x_1-1 e x_1, con

$$x_0 < x_1 - 1 .$$

Assumiamo per il tasso annuo di variazione μ'_y , che abbiamo supposto funzione dell'età y, il modello esponenziale

$$(3.5) \quad \mu'_y = \mu'_{x_0}\, e^{h'(y-x_0)}$$

Supponendo nota una stima di μ'_{x_0}, risulta allora

$$(3.6) \quad \varphi_{x_1} = \varphi_{x_0} \prod_{y=x_0}^{x_1-1} (1+\mu'_y)$$

cioè

$$\zeta'_{x_1} \equiv [\ln \varphi_{x_1} - \ln \varphi_{x_0}] / \mu'_{x_0} \cong \sum_{y=x_0}^{x_1-1} e^{h'-(y-x_0)}$$

da cui si ricava il valore stimato $h'_{x_1} = \ln(\zeta'_{x_1} - \zeta'_{x_1-1}) / (t_1 - 1)$ che, unitamente a μ'_{x_0}, consente tramite la (3.5) di determinare la sequenza $\{\mu'_y\}$.

b) *indice di sinistrosità* Ψ_x *per degenze ospedaliere (D)*

Con sviluppi analoghi a quelli in a), si può stimare l'intensità di variazione k' dei tassi $\nu'_y = \nu'_{x_0} e^{k'(y-x_0)}$ ponendo:

$$\chi'_y = \ln(\psi'_y - \psi'_{x_0}) / \nu'_{x_0} \quad .$$

c) *numero atteso* g_x *dei giorni di ricovero (D)*

Anche qui si può stimare l'intensità di variazione k" dei tassi $\nu''_y = \nu'_{x_0} e^{k''(y-x_0)}$ ponendo:

$$\chi''_y = (\ln g_y - \ln g_{x_0}) / \nu''_{x_0}$$

d) *diaria giornaliera* b_z *per degenza ospedaliera (D)*

Si pone: $b_y = b_{z0}(1+w)^{y-z0}$ con $y = z_0, z_0+1, \dots.$ dove la costante w si stima mediante $\log(1+w) = \log(b_{z_1} / b_{z_0}) / (z_1 - z_0)$, ossia il rapporto incrementale di $\log b_y$ tra z_0 e z_1.

e) *costo atteso* $c_{x,z}$ *di un singolo sinistro (M)*

Occorre considerare congiuntamente la dinamica collegata a z con uno sviluppo analogo a d) e quella collegata ad x in modo analogo ad a) con un tasso $\mu''_y = \mu''_{x_0} e^{h''(y-x_0)}$, ossia, essendo $t_1 = x_1 - x_0$ risulta

$$(3.7) \qquad \ln c_{x_1, z_1,} = c_{x_0, z_0,} (1+w)^{t_1} \prod_{y=x_0}^{x_1-1} (1+\mu'_y) \prod_{y=x_0}^{x_1-1} (1+\mu''_y)$$

Di qui, posto:

$$\zeta''_{x_1} \equiv [\ln c_{x_1,z_1} - \ln c_{x_0,z_0,} - t_1 \ln(1+w)] / \mu''_{x_0} = e^{h''(t_1-1)}$$

si ricavano h" ed i valori $\{\mu''_y\}$.

In conclusione, con i parametri come sopra determinati, possono ricavarsi le stime ${}^*\lambda^{(M))}$ e ${}^*\lambda^{(D))}$ rispettivamente dei tassi medi di adeguamento complessivo $\hat{\lambda}^{(M)}$ per spese mediche e $\hat{\lambda}^{(D)}$ per spese di degenza ospedaliera, dedotte da

$$(3.8)\qquad \left(1+{}^{*}\lambda^{(M)}\right)^{t_1} = (1+w)^{t_1} \prod_{y=x_0}^{x_1-1}\left(1+\mu'_y\right) \prod_{y=x_0}^{x_1-1}\left(1+\mu''_y\right)$$

$$(3.9)\qquad \left(1+{}^{*}\lambda^{(D)}\right)^{t_1} = (1+w)^{t_1} \prod_{y=x_0}^{x_1-1}\left(1+\nu'_y\right) \prod_{y=x_0}^{x_1-1}\left(1+\nu''_y\right)$$

4. *Effetti di tare specifiche: il modello markoviano*

4.1. *Formalizzazione delle matrici dei costi e loro misturazione*

Oltre alla dinamica dei costi ordinari sin qui esaminata, vogliamo ora esaminare, come opportuna estensione, quella dei costi straordinari dovuti al sopraggiungere, successivamente all'ingresso in assicurazione, di malattie gravi, solitamente irreversibili, che costituiscono "tare" in senso assicurativo. Tratteremo questo caso nell'ipotesi che l'assicuratore non possa recedere dal contratto per sopravvenienza di rischio tarato. I singoli elementi delle matrici dei costi $\| Q^{(M)}{}_{x,z} \|$ e $\| Q^{(D)}{}_{x,z} \|$ vanno allora sostituiti con elementi maggiorati in conseguenza della patologia insorta.

Considerate n tare, si hanno n+1 (= numero delle combinazioni complete di 2 elementi in classe n) stati se le tare sono tra loro *fungibili* rispetto ai costi, onde ha rilievo soltanto il loro numero, oppure, più in generale, 2^n (= numero delle disposizioni complete di 2 elementi in classe n) stati se essi vanno distinti non soltanto per il numero ma anche per il tipo di tara.

Per approfondire in tutti i dettagli la dinamica dei costi in presenza di tare, è necessario considerare tante matrici di costo in funzione dell'età x e del tempo corrente z, quanti sono gli stati del sistema, attribuendo ad ogni matrice un indice i (stato di tara) variabile da 1 a 2^n (i =1: assenza di tare; i >1: presenza di tare).

È chiaro che, nella nuova situazione, occorrerà diversificare gli elementi delle matrici a seconda dello stato i, introducendo nelle singole componenti delle quote danni lo stato di tara corrispondente.

In questo contesto è evidente che la dinamica dei costi, per effetto dell'incertezza sulle variazioni nel pacchetto di tare per l'assicurato in esame, dà luogo ad un processo stocastico che viene assunto markoviano omogeneo. Indicata con

$$(4.1) \qquad P = \| p_{ij} \| \qquad (i, j = 1, \ldots 2^n)$$

la matrice delle probabilità di transizione dallo stato i allo stato j in un periodo annuale, effettuando la valutazione in termini di valori medi, la traiettoria dei costi medi in presenza di variazioni di tare è una “linea misturata” con pesi dati dagli elementi della potenza di P.

In formule, (in ipotesi di indipendenza fra le variazioni di costo connesse all’età e quelle per lo stato di tare) se l’assicurato si trova nella situazione (x,z) e con lo stato di tara i, il costo medio rispetto alla aleatorietà delle tare dopo un periodo annuale è dato dalla seguente formula

$$(4.2) \qquad {}_1Q^{(y)}{}_{x,z;i} = \sum_{j=1}^{2^n} p_{ij} \; Q^{(Y)}{}_{x+1,z+1;j}$$

dove Y=M se trattasi di spese mediche
e Y=D se trattasi di spese di degenza.

4.2. *L’analisi della matrice delle probabilità di transizione*

La formula generale (4.2) mostra in quale modo le quote danni medie rispetto agli stati e tutto il processo di misturazione dipendono dalla matrice delle probabilità di transizione fra tutti i possibili pacchetti di tare, la cui quantificazione assume quindi un ruolo fondamentale. Appare perciò utile approfondire e commentare le tipologie delle probabilità di transizione tra tutti i possibili pacchetti di tare.

Per esemplificare prendiamo in esame il caso di 3 tare che originano $2^3 = 8$ stati. Tali stati possono così definirsi:

$$\begin{array}{ll} 1 & = \text{assenza di tare;} \\ \left.\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\right\} & = \text{possesso di una tara;} \\ \left.\begin{array}{l} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\right\} & = \text{possesso di due tare;} \\ 8 & = \text{possesso di tre tare.} \end{array}$$

Procedendo per righe sulla matrice 8x8 si ottiene la classificazione degli eventi $E_{ij} =$ “passaggio dallo stato i allo stato j” $(i, j = 1, \ldots, 8)$ nel periodo considerato, avendo posto:

permanenza = conservazione stato di tara del periodo precedente;
aggravamento = aumento n-ro tare rispetto al periodo precedente;
miglioramento = diminuzione n-ro tare rispetto al periodo precedente;
guarigione totale = passaggio da presenza ad assenza di tare.

a_1)	p_{11}			permanenza
a_2)	p_{1j}	$(j = 2,3,4)$		aggravamento
a_3)	p_{1j}	$(j = 5,6,7)$		aggravamento
a_4)	p_{18}			aggravamento
b_1)	p_{i1}	$(i = 2,3,4)$		guarigione totale
b_2)	p_{ij}	$(i = 2,3,4)$	$(j = 2,3,4)$	invarianza n-ro tare
b_3)	p_{ij}	$(i = 2,3,4)$	$(j = 5,6,7)$	aggravamento
b_4)	p_{i8}	$(i = 2,3,4)$		aggravamento
c_1)	p_{i1}	$(i = 5,6,7)$		guarigione totale
c_2)	p_{ij}	$(i = 5,6,7)$	$(j = 2,3,4)$	miglioramento
c_3)	p_{ij}	$(i = 5,6,7)$	$(j = 5,6,7)$	invarianza n-ro tare
c_4)	p_{i8}	$(i = 5,6,7)$		aggravamento
d_1)	p_{81}			guarigione totale
d_2)	p_{8j}	$(j = 2,3,4)$		miglioramento
d_3)	p_{8j}	$(j = 5,6,7)$		miglioramento
d_4)	p_{88}			permanenza

In tale classificazione gli eventi E_{ij} , in numero di 64 (o di 2^{2n} nel caso generale di n tare al più), risultano raggruppati mediante unione, dando luogo agli eventi sintetizzati in $a_{1,\dots,}a_{4,\dots,}d_{1,\dots,}d_4$, in numero di 16 (o di $(n+1)^2$ nel caso generale), le cui probabilità si ottengono quindi per somma delle corrispondenti p_{ij} , allorchè susssista una *fungibilità* tra le tare,cioè interessi non *quali* tare colpiscano il soggetto, ma soltanto *quante*. Ai 16 casi $a_{1,\dots\dots,}d_4$ corrispondono altrettanti blocchi della matrice delle p_{ij} specificati nella figura 1.

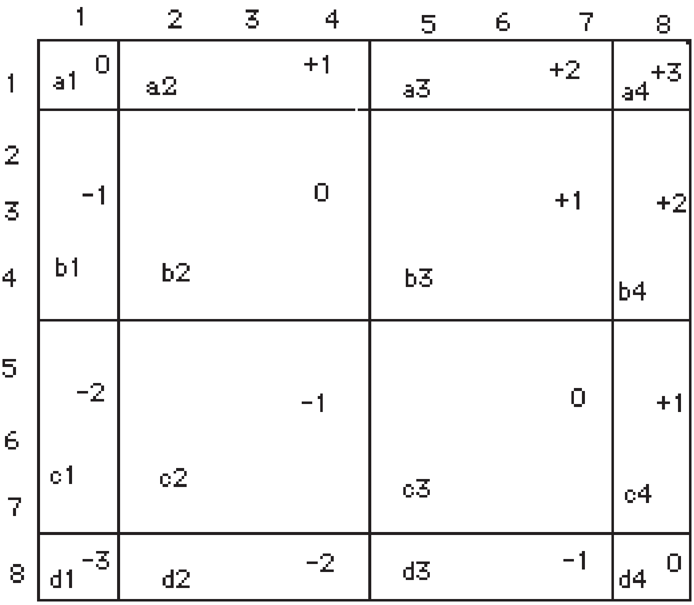

Fig. 1

In essa, per ciascun blocco, è indicato il numero intero relativo Δk delle variazioni di tare ($\Delta k = -3,-2,....,+2,+3$) risultando ovviamente:

$\Delta k > 0$ per gli aggravamenti;
$\Delta k = 0$ per le invarianze di numero;
$\Delta k < 0$ per i miglioramenti

Il numero dei gruppi con il medesimo Δk è $4-|\Delta k|$

La predetta classificazione degli eventi $E_{i\,j}$ può essere significativamente illustrata con l'ausilio della fig.2, introducendo le seguenti abbreviazioni:

AsG = acquisizione di malattie taranti senza guarigioni (19 casi);
GsA = guarigione da malattie taranti senza acquisizioni (19 casi);
Per = permanenza delle tare preesistenti (8 casi);
SsV = sostituzione di malattie taranti senza variazioni del numero (12 casi);
ScV = sostituzione di malattie taranti con variazioni del numero (6 casi).

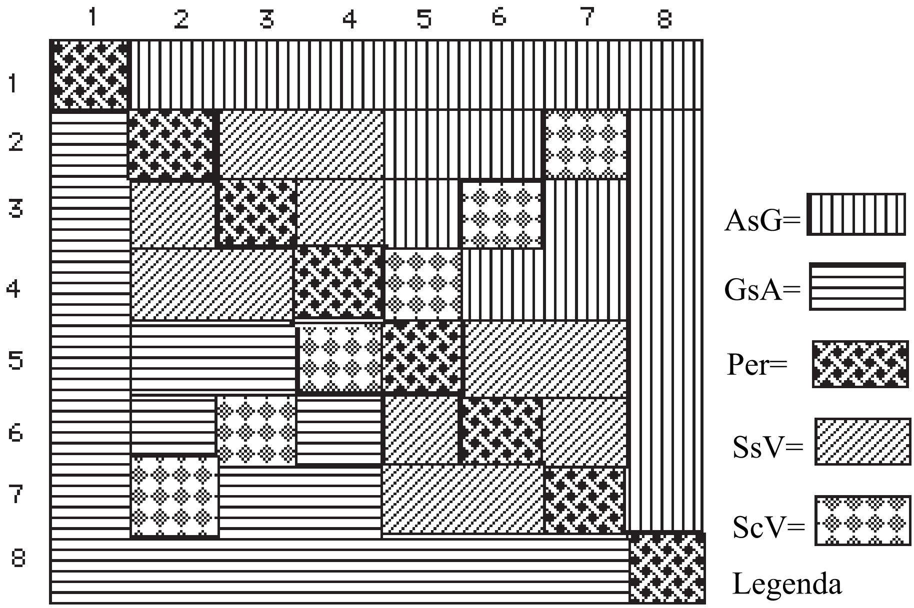

Fig. 2

5. *L'analisi dei delta costi*

Prendiamo ora in considerazione un contratto pluriennale del tipo di quelli esaminati in precedenza e per esso consideriamo le conseguenze dell'evoluzione dei costi per spese mediche e per degenza ospedaliera sull'andamento dei premi annui.

È chiaro che, in presenza di clausole riduttive dei risarcimenti, di massimali o di franchigie, la "prestazione" nei successivi sviluppi, concernenti il mantenimento dell'equilibrio attuariale in condizioni dinamiche, riguarda solo la parte di costo che resta a carico dell'istituto assicurativo, tenuto conto delle relazioni fra prestazioni, premi periodici e riserva matematica (di senescenza).

In riferimento ad un dato anno di osservazione verrà assunto un sistema di adeguamento dei premi periodici, a priori costanti, con le modalità più sotto precisate.

Per formalizzare la trattazione, introduciamo i seguenti simboli:

m = durata del contratto = numero dei premi annui;

t = antidurata del contratto nell'anno di riferimento ($t=1,\dots m$);

V_t = riserva matematica di senescenza all'inizio dell'anno ($t, t+1$);

$P_{x,m}$ = premio annuo anticipato, costante in assenza di adeguamento delle prestazioni;

$U_{x+t,m-t}$ = valore attuale medio (abbr.: v.a.m.) in t delle prestazioni successive a t;

$U_{x+t} = U_{x+t,1}$ = v.a.m. in t delle prestazioni dell'anno (t, t+1) (=premio naturale);

$j_t^{(1)}$ = tasso di variazione dei costi complessivi delle prestazioni che sono a carico dell'assicuratore;

$j_t^{(2)}$ = tasso di variazione della riserva matematica in relazione a versamenti (o prelevamenti) assimilabili a premi unici straordinari;

$j_t^{(3)}$ = tasso di variazione dei premi periodici;

${}_{|m-t}\ddot{a}_{x+t}$ = valore attuale medio di rendita vitalizia unitaria temporanea anticipata.

È noto che, in assenza di variazione dei costi, per la "riserva di senescenza" vale la seguente equazione ricorrente

$$(5.1) \qquad V_t + P_{x,m} = U_{x+t} + {}_1E_{x+t} V_{t+1}$$

In termini prospettivi il v.a.m. in t delle prestazioni future soddisfa la relazione

$$(5.2) \qquad U_{x+t,m-t} = V_t + P_{x,m} \; {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

In presenza, invece, di variazione di tali costi, l'onere $U_{x+t,m-t}$ va adeguato al tasso $j_t^{(1)}$, che comprenderà anche gli effetti di malattie taranti. Inoltre, per il mantenimento dell'equilibrio attuariale occorrono altresì variazioni della riserva al tasso $j_t^{(2)}$ e/o del premio periodico al tasso $j_t^{(3)}$. Introdotti allora i tassi di variazione, la (5.2) diventa

$$(5.3) \qquad U_{x+t,m-t}\,(1+j_t^{(1)}) = V_t\,(1+j_t^{(2)}) + P_{x,m}\,\ddot{a}_{x+t,m-t}\,(1+j_t^{(3)})$$

Seguendo la letteratura, ma tenendo esplicitamente conto anche dei casi tarati, posto:

$$\rho_{x,m,t} = V_t / U_{x+t,m-t}$$

e tenendo presente la (5.2), dalla (5.3) si ricava

$$(5.4) \qquad j_t^{(1)} = j_t^{(2)}\,\rho_{x,m,t} + j_t^{(3)}(1-\rho_{x,m,t})$$

ossia $\forall t$, $j_t^{(1)}$ è media aritmetica ponderata di $j_t^{(2)}$ e $j_t^{(3)}$.

Il vincolo (5.4) tra i tassi di variazione può essere adoperato nella ripartizione dei maggiori oneri connessi ad un predeterminato adeguamento delle prestazioni assicurative in base al tasso $j_t^{(1)}$ fra adeguamento di riserva ed adeguamento del premio periodico, in base ad una scelta di tassi $j_t^{(2)}$.

Viene, invece, qui di seguito adottato un diverso approccio, distinguendo tra adeguamento ordinario dei costi, dovuto al procedere dell'età e all'inflazione monetaria, e subitanee variazioni straordinarie di costo, dovute a modifiche dello stato di tare per sopravvenute malattie taranti nell'anno $(t-1, t)$, con $t = x - x_0 = z - z_0$. Tale approccio si basa sull'ipotesi che le variazioni straordinarie di costo - per lo più in aumento, data l'eccezionalità delle guarigioni da malattie taranti, onde di norma è: $j_t^{(2)} > 0$ - diano luogo unicamente a variazioni di riserva, mentre le variazioni ordinarie - sistematicamente in aumento, onde $j_t^{(3)} > 0$ - diano luogo unicamente a variazioni del premio periodico.

Circa l'adeguamento straordinario in base al tasso $j_t^{(2)}$, va precisato che possono costituire variazioni di riserva per il suddetto motivo quelle relative al costo per malattie taranti anche in condizioni di permanenza dello stato di tare nel senso già in precedenza specificato.

Riprendendo gli sviluppi precedenti - ove si distingueva fra i settori M = "spese mediche" e D = "diarie per ricoveri ospedalieri"- e riscrivendo la (5.4) con i tassi $j_t^{(h)} = {}^{(Y)}j_t^{(h)}$ (h= 1,2,3 ; Y = M, D) , la dinamica dei costi a carico dell'assicuratore sarà così articolata:

1) l'adeguamento dei costi ordinari a carico dell'assicuratore, connesso all'aumento dell'età e dei prezzi procederà al tasso $\hat{\lambda}^{(Y)}$ definito nel § 2, distintamente per spese mediche o per degenze ospedaliere;

2) la variazione dei costi straordinari connessi alle tare consegue dal processo stocastico markoviano specificato nel § 4 e viene qui considerata soltanto al livello di valori medi (in chiave con la filosofia delle "linee misturate" introdotte precedentemente) alla fine dell'anno $(t-1, t)$.

Non essendovi ulteriori problemi per il punto 1) , rimane da determinare, come specificato nel punto 2) , il tasso ${}^{(Y)}j_t^{(2)}$, (Y = M, D), di variazione della riserva in corrispondenza dell'antidurata t.

A tal fine, adottando la simbologia del § 4, consideriamo un portafoglio stratificato in sottoportafogli omogenei di contratti con medesima durata riguardanti assicurati coetanei di età x_0 nell'anno di ingresso z_0 . Facciamo poi le seguenti posizioni:

-) $C_{j;\,t,x_0}$ ="delta-costo" per lo stato di tare j = valore attuale al tasso tecnico (ad es., quello di rendimento della riserva) ed al tempo z, corrispondente all'antidurata t, degli incrementi successivi a z rispetto allo stato 1 (= assenza di tare) per la testa assicurata che si trovi all'età $x = x_0 + t$ nello stato di tare j; $(i, j = 1,\dots,2^n\,;\, t = 1,\dots,m)$; da questa definizione segue:

$$(5.5) \qquad C_{1;\,t,x_0} = 0 \quad \forall(t, x_0);$$

-) $\Delta C_{ij;\,t,x_0} = C_{j;\,t,x_0} - C_{i;\,t-1,x_0}$ = "variazione del delta-costo" per lo stato di tare j in riferimento alla medesima testa di età x, nella ipotesi che all'età x-1, quindi al tempo z-1 e antidurata t-1, essa si sia trovata nello stato di tare i;

-) $\Delta C_{t,x_0} = \left\| \Delta C_{ij;\,t,x_0} \right\|$ = matrice delle variazioni dei delta- costi;

-) $a_{0,x_0}(i)$ = probabilità di stato iniziale per un assicurato di età x_0 = probabilità che alla stipula del contratto l'assicurato di età x_0 si trovi nello stato di tare i e che quindi gli venga addebitata una costituzione di riserva pari a $C_{i;\,0,x_0}$ $(i \neq 1)$ oltre al pagamento del premio periodico per il costo ordinario corrispondente allo stato 1.

È noto che $\sum_i a_{0,x_0}(i) = 1$ coerentemente con quanto premesso.

Opereremo qui nell'ipotesi $a_{0,x_0}(1) = 1$; $a_{0,x_0}(i) = 0,\ \ (i \neq 1)$; ma nulla impedisce di considerare il caso generale di presenza di tare all'ingresso in assicurazione.

-) $\underline{a}_{0,x_0} = [a_{0,x_0}(i)]$ = vettore riga delle probabilità di stato iniziale per assicurati di età x_0 ; nell'ipotesi assunta risulta: $\underline{a}_{0,x_0} = [1,0,\dots,0]$;

-) $\underline{a}_{r,x_0} = [a_{r,x_0}(i)] =$ vettore riga delle probabilità di stato al tempo r per assicurati di età $x_0 + r$;

-) $P = \| p_{ij} \|$ = matrice $2^n \times 2^n$ delle probabilità di transizione, definita nel §4, fra stati di tare in un periodo (per es., annuale);

-) $P^h = \| p_{ij}{}^h \|$ = matrice $2^n \times 2^n$ potenza h-esima di P, i cui elementi sono le probabilità di transizione fra stati di tare in h periodi.

Determiniamo allora il v.a.m. delle successive variazioni di costo, nell'ipotesi che siano acquisibili, in base ad una stratificazione per età all'ingresso in assicurazione i dati per la costruzione delle seguenti matrici $2^n \times 2^n$:

a) la matrice $P = \| p_{ij} \|$;

b) le matrici $\Delta C_{t,x_0} = \| \Delta C_{ij;\,t,x_0} \|$, $\forall (t, x_0)$;

c) i vettori riga $\underline{a}_{0,\,x_0}$, $\forall\, x_0$, delle probabilità di stato iniziale, riferite allo stato di tare degli assicurati di ciascuna età x_0 all'ingresso in assicurazione.

Procedendo in maniera ricorrente, il vettore riga delle probabilità di stato di tare al tempo z-1 per un assicurato del dato portafoglio (quindi con antidurata t-1 ed età $x_0 + t - 1$) si determina mediante

$$(5.6) \quad \underline{a}_{t-1,\,x_0} = \underline{a}_{0,\,x_0}\ P^{\,t-1}, \quad \forall x_0$$

Se al tempo z-1 l'assicurato si trova nello stato di tare i , ossia è vero l'evento $H_{i;\,t-1,\,x_0}$ = {stato di tare = i} , segue dagli sviluppi e dalle posizioni precedenti, nonchè dalle proprietà di P, indipendente da (t, x_0), che i valori medi delle variazioni del delta-costo si ottengono applicando l'operatore E di valor medio agli elementi della i-esima riga della matrice $\Delta C_{t,\,x_0}$, che indicheremo col simbolo $\Delta C_{t,\,x_0} / H_{i;\,t-1,\,x_0}$, $(i = 1,\ldots,2^n)$. Si ottiene quindi

$$(5.7) \quad E\{\Delta C_{t,\,x_0} / H_{i;\,t-1,\,x_0}\} = \sum_{j=1}^{2^n} p_{i\,j}\, \Delta C_{i\,j;\,t,\,x_0}$$

Dato che l'evento $H_{i;\,t-1,\,x_0}$ ha probabilità $a_{t-1,x_0}(i)$, = i-esima componente del vettore (5.6), ne consegue che il valore medio, senza subordinazioni, delle variazioni di delta-costo in t (valore al quale deve conformarsi la variazione istantanea di riserva ΔV_t dovuta all'adeguamento dello stato delle tare e dei costi delle tare in t) è dato dall'espressione

$$(5.8)\quad \begin{aligned} E\{\Delta C_{t,x_0}\} &= \sum_{i=1}^{2^n} a_{t-1,x_0}(i)\ \ E\{\Delta C_{t,x_0} / H_{i;t-1,x_0}\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2^n}\ \sum_{j=1}^{2^n} a_{t-1,x_0}(i)\ \ p_{ij}\ \Delta C_{ij;t,x_0} \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di $\Delta C_{ij;\,t,x_0}$ ed essendo, $\forall i, \sum_{j=1}^{2^n} p_{ij} = 1$ la (5.8) può essere trasformata in

(5.8')

$$E\{\Delta C_{t,x_0}\} = \sum_{i=1}^{2^n} a_{t-1,x_0}(i) \sum_{j=1}^{2^n} p_{ij} C_{j;t,x_0} - \sum_{i=1}^{2^n} a_{t-1,x_0}(i)\, C_{i;t-1,x_0}$$

comparendo al 2° membro di (5.8') la differenza fra i valori medi dei delta-costi in t e in t-1. Pertanto la (5.8') riporta al caso in esame la permutabilità fra gli operatori di valore medio e di somma algebrica di variabili aleatorie.
In relazione poi al problema delle attribuzioni degli oneri connessi alle variazioni di riserva per effetto di tare, consideriamo due varianti che si distinguono per le modalità di imputazione dei maggiori esborsi per gli assicurati, sotto forma di premi integrativi dovuti all'adeguamento in base al tasso $j_t^{(2)}$, ed inoltre, relativamente a ciascuna di esse, diamo opportuni criteri per la loro quantificazione .

- variante A) <u>*senza mutualità*</u>

Assumiamo che la variazione (per lo più: incremento) di riserva dovuta ad un mutamento dello stato di tare dia luogo ad un esborso a carico di quell'assicurato che ha dato luogo a tale cambiamento; questi ha peraltro la facilitazione del pagamento rateale sotto forma di premio integrativo dall'anno di insorgenza della variazione alla fine del contratto, subordinatamente alla sopravvivenza. Tale sovrapremio diventa cioè un contributo straordinario, che rimane a carico dell'assicurato in quanto l'aumento di riserva è dovuto a maggiori oneri per motivo a lui imputabile.

Occorre allora considerare non valori attesi ma delta-costi effettivi in conseguenza di reali variazioni nello stato di tare per ciascun assicurato, indipendentemente dagli altri. Precisamente, se nel passaggio dalla antidurata t-1 a t l'assicurato in esame passa dallo stato i a j (avendo già computato le variazioni di premio dovute al passaggio da 1 a i), è a suo carico la variazione del delta-costo $\Delta C_{ij;\,t,x_0} = C_{j;\,t,x_0} - C_{i;\,t-1,x_0}$ (o a suo sgravio se esso è negativo) che verrà regolato col sovrapremio periodico, pagabile da quel momento fino alla scadenza al tempo $z_0 + t^*$, espresso da

$$(5.9) \qquad \Delta\pi_{i\,j;\,t,x_0} = \Delta C_{i\,j;\,t,x_0} \,/\, \ddot{a}_{x_0+t,\,t^*-t}$$

Naturalmente questo sovrapremio periodico si cumula agli altri per precedenti variazioni onde il livello dei sovrapremi annui complessivi è una sequenza costante a tratti.

- *variante B)* <u>*con mutualità*</u>

Assumiamo che i valori attesi dei maggiori costi dovuti a variazione di tare siano ripartiti all'ingresso in assicurazione fra tutti gli assicurati appartenenti a classi omogenee del portafoglio (es. assicurati con età x_0 all'ingresso e medesima durata t^* di assicurazione) che abbiamo supposto per semplicità privi di tare, sotto forma di maggiorazioni di premio periodico che riguardano tutti gli assicurati per tutta la durata del contratto, quali che siano coloro che effettivamente saranno colpiti da tare.

Si prende allora in considerazione non più il costo del singolo contratto, bensì quello riferito ad un portafoglio omogeneo nel senso precisato, determinando poi il premio unico come rapporto fra il v.a.m. in z_0 dei maggiori costi complessivi dovuti a successive variazioni nello stato di tare e il numero degli assicurati all'ingresso.

Come già detto in precedenza, occorre considerare un sottoportafoglio di contratti omogenei, cui applicare la mutualità; indichiamo con n_0 il numero degli assicurati di tale gruppo e $\{l_y\}$ la tavola di sopravvivenza per essi.

Ricordando (5.8') che fornisce l'incremento atteso di riserva in t dovuto a tare, essendo $n_t = n_0\, l_{x_0+t} / l_{x_0}$ il numero medio di sopravviventi in t e η il tasso di rendimento, si ricava il v.a.m. al tempo z_0 $(\text{onde } t = 0)$ delle variazioni complessive di riserva dovute all'evoluzione delle tare, che è

$$(5.10) \quad \Delta V = \sum_{t=1}^{t^*} n_t \;\; E\{\Delta C_{t,\,x_0}\}(1+\eta)^{-t}$$

Per l'omogeneità degli assicurati, il sovrapremio unico pro-capite di competenza di ciascun assicurato in regime di mutualità è dato da $\Delta V / n_0$ e conseguentemente quello annuo per le maggiori prestazioni dovute a tare è dato da

$$(5.11) \quad \Delta P = \Delta V / (n_0 \;\; {}_{/t^*}\ddot{a}_{x_0})$$

Per ottenere il tasso di variazione ${}^{(Y)}j_t^{(2)}$ dei delta-costi complessivi dovuti alle tare, come già accennato occorre rapportare la variazione assoluta media espressa dalla (5.8) al valore della riserva di senescenza con antidurata t-1, algebricamente incrementato della variazione di riserva dovuta alle prestazioni ordinarie: tale incremento ha lo scopo di valutare la variazione relativa dovuta esclusivamente ai movimenti connessi alle tare.

Una volta determinati i tassi ${}^{(Y)}j_t^{(3)}$ e ${}^{(Y)}j_t^{(2)}$ in base alla effettiva dinamica dei costi ordinari e dei valori medi dei costi aleatori straordinari, e determinato altresì il v.a.m. $U_{x+t,\,m-t}$ all'antidurata t in base alla (5.2) al netto di qualsiasi adeguamento applicabile in t , il vincolo (5.4) consente di valutare il tasso ${}^{(Y)}j_t^{(1)}$ di adeguamento delle prestazioni, che tiene conto anche dei costi delle malattie taranti e della loro evoluzione, in base al principio della conservazione dell'equilibrio attuariale.

Questo modo di procedere è alternativo a quello, più complesso, dell'evoluzione delle linee misturate descritto in precedenza , il quale consentirebbe peraltro di operare sulle distribuzioni e non soltanto sui valori medi fornendo così informazioni sulla rischiosità del processo di costo.

6. *Esemplificazione*

Concludiamo il lavoro con l'esame del caso particolare di tre malattie taranti, con l'approssimazione di considerare trascurabili, ponendo uguali a zero le rispettive probabilità, le transizioni che comportano in un periodo annuale guarigioni da tali malattie con o senza nuove acquisizioni, nonchè acquisizioni di più di una malattia tarante. Rimangono quindi con probabilità positiva soltanto gli eventi di permanenza nello stato o di acquisizione di una sola malattia in un singolo periodo. In questa ipotesi, con la terminologia usata nel § 4.2 per sviluppare il caso n = 3, gli stati collegati alle tre malattie taranti considerate sono:

(1) = nessuna malattia; (2) = prima malattia; (3) = seconda malattia; (4) = terza malattia; (5) = prima e seconda malattia; (6) = prima e terza malattia; (7) = seconda e terza malattia; (8) = tutte e tre le malattie.

Pertanto gli elementi non necessariamente nulli della matrice $P = \| p_{ij} \|$ delle probabilità di transizione sono soltanto quelli contenuti nella seguente tabella:

Stato di provenienza	*Riga di P*	*Probabilità non nulle*
nessuna malattia	1	p_{11} p_{12} p_{13} p_{14}
una malattia	2	p_{22} p_{25} p_{26}
una malattia	3	p_{33} p_{35} p_{37}
una malattia	4	p_{44} p_{46} p_{47}
due malattie	5	p_{55} p_{58}
due malattie	6	p_{66} p_{68}
due malattie	7	p_{77} p_{78}
tre malattie	8	p_{88}

Dato che la matrice P non ha colonne tutte nulle, neppure i vettori riga $\underline{a}_{r,x_0}$ hanno componenti sistematicamente nulle al crescere di r, ossia ognuno degli 8 stati rimane possibile.

La (5.8'), che costituisce il numeratore della frazione che definisce il tasso ${}^{(Y)}j_t^{(2)}$, si scrive allora

$$(6.1) \qquad E\left\{\Delta C_{t,x_0}\right\} = \sum_{i=1}^{8} a_{t-1,x_0}(i)\ S$$

dove, avendo già osservato che $C_{1;t,x_0} = 0$, $\forall (t, x_0)$, S è la somma dei seguenti termini, di ovvia interpretazione, riguardanti gli stati di arrivo in t:

-) $(p_{12} + p_{22})\ C_{2;t,x_0}$
-) $(p_{13} + p_{33})\ C_{3;t,x_0}$
-) $(p_{14} + p_{44})\ C_{4;t,x_0}$
-) $(p_{25} + p_{35} + p_{55})\ C_{5;t,x_0}$
-) $(p_{26} + p_{46} + p_{66})\ C_{6;t,x_0}$
-) $(p_{37} + p_{47} + p_{77})\ C_{7;t,x_0}$
-) $(p_{58} + p_{68} + p_{78} + p_{88})\ C_{8;t,x_0}$

7. *Conclusioni*

Gli sviluppi formali e le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti costituiscono la base per la definizione e la valutazione, con opportuni metodi statistici, della dinamica dei costi connessi ai rischi di malattia, con speciale riguardo ai rimborsi di spese mediche e di degenza ospedaliera. Nel presente lavoro l'indagine è stata effettuata sia in ipotesi di assenza che di presenza di tare, studiando altresì il processo evolutivo tra stati di tara. Tutto ciò trova corrispondenza speculare nel calcolo dei premi e della loro dinamica.

È stato poi esaminato il caso particolare di tre malattie taranti; analoghe esemplificazioni ed applicazioni possono essere sviluppate sulla base di ragionevoli ipotesi sull'evoluzione delle malattie e dei conseguenti costi, nonchè tenendo conto dei dati statistici del settore.

Osserviamo infine che applicazioni fondate su esperienze assicurative e su dati statistici concreti comporterebbe anche l'uso di modelli simulativi; va però evidenziata la scarsa disponibilità dei suddetti dati.

Bibliografia

A. Bonora Grassilli, *Sull'assicurazione malattie*, Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Università di Bologna, 1998.

E. Cardona, *Sulla evoluzione dei costi nelle assicurazioni per il rischio malattia*, in *Atti del XXI Convegno Annuale A.M.A.S.E.S.* (Associazione per la matematica applicata alle scienze economiche e sociali), Roma, 1997, pp. 177-190.

E. Cardona, *Sulla dinamica dei costi nelle assicurazioni sulla salute in presenza di rischi tarati*, in *Atti del XXII Convegno Annuale A.M.A.S.E.S.* (Associazione per la matematica applicata alle scienze economiche e sociali), Genova, 1998, pp. 93-108.

G. Crenca, *Un modello per la determinazione del premio in una polizza malattia per il rimborso delle spese mediche ed ospedaliere e per l'indennita' giornaliera (diaria) in caso di ricovero*, in «Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari», LIII , N. 1-2, 1990.

L. Daboni, *Calcolo delle probabilità ed elementi di Statistica*, Università di Trieste, Utet, 1970.

M. Denuit, *Actuariat des assurances de Personnes: Modélisation, tarification et provisionnement*, Ed. Economica, 2007.

P. Devolder - B.L. Yerna, *Construction d'une méthode spécific d'indexation des contracts privés d'assurance maladie,* in «Belgian Actuarial Bullettin», Volume 8, N. 1, 2008.

S. Haberman - E. Pitacco, *Actuarial models for disability insurance,* Londra, Chapman&Hall, 1998.

G. Galatioto, *Modello matematico per la determinazione del premio dell'assicurazione rimborso spese mediche e ospedaliere o di diaria,* Pubblicazione A.N.I.A., 1993.

F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrix*, Chelsea, Pu.Co. N.Y., 1990.

G. C. Orros - J.M. Webber, *Medical Expense Insurance. An Actuarial Review*, in «JIA», Volume 115, 1988.

E. Pitacco, *Modelli attuariali per le assicurazioni sulla salute*, in *Centro di Ricerche Assicurative e Previdenziali dell'Università Bocconi*, n. 7, Milano, Egea, 1995.

E. Pitacco, *Coperture assicurative per rischi "non vita"*, in A.Tomassetti e altri, *Tecnica attuariale per collettività*, Volume secondo, Roma, Ed.Kappa, 1995, pp. 347-386.

E. Pitacco - A. Olivieri, *Introduzione alla teoria attuariale delle assicurazioni di persone*, in *Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, n. 42*, Bologna, Ed. Pitagora, 1997.

E. Pitacco, *Elementi di Matematica delle assicurazioni*, Trieste, Lint, 2002.

S.M. Ross, *Stochastic Processes*, New York, Wiley, 1983.

Università degli Studi di Napoli Federico II
Centro di Ateneo per le Biblioteche "Roberto Pettorino"

Gli studi raccolti in questo volume costituiscono il primo 'Quaderno' della nuova Collana di pubblicazioni della Scuola di Scienze Umane e Sociali dell'Ateneo fridericiano, promossa con l'intendimento di facilitare il confronto e il dialogo tra studiosi di varia provenienza, di sollecitare indagini trasversali e interdisciplinari sia su argomenti lontani nel tempo sia su temi di grande attualità che sono parte del nostro vissuto quotidiano. Il volume rappresenta una felice sintesi tra passato e presente, come è prerogativa delle ricerche appartenenti alla cultura umanistica, che ha a oggetto lo studio dell'esperienza umana considerata nella sua globalità.

ISBN: 97 978-88-6887-002-7
DOI: 10.6093/978-88-6887-002-7